Н. Н. Воробьев, Экстремальная алгебра матриц, *Докл. АН СССР*, 1963, том 152, номер 1, 24–27

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 152, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ АЛГЕБРА МАТРИЦ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 III 1963)

В последнее время возник теоретический и практический интерес к экстремальным задачам нетрадиционного характера: множество значений, принимаемых переменной, по которой производится экстремизация, имеет в них довольно сложную природу. Наиболее распространены задачи, в которых это множество является либо областью многомерного (и притом весьма многомерного!) векторного пространства, либо дискретно и описывается соотношениями комбинаторного характера. Задачи первого типа рассматриваются в различных областях оптимального программирования (линейное программирование, динамическое программирование); задачи второго типа возникают, например, в теории графов. Связи между задачами обоих типов известны. Достаточно привести в качестве примера транспортную задачу в сетевой постановке.

Ввиду сказанного представляется естественным систематическое изучение экстремизации как некоторой операции и ее связи с основными алгебраическими действиями, сложением и умножением. Такое изучение уже предпринималось, прямо или косвенно, в ряде работ (см., например, ([1-5])).

В настоящей заметке излагается подход к этому вопросу в духе линейной алгебры. Основные операции над матрицами, рассматриваемые здесь, впервые изучались с алгебраической точки зрения, по-видимому, Пандитом ([6]). Им, однако, не была обнаружена тесная связь типа двойственности между двумя экстремизационными операциями: максимизацией и минимизацией. Поэтому ему не удалось выйти за пределы элементарных экстремизационных свойств матриц.

1. Экстремальные операции над матрицами. Далее мы будем рассматривать матрицы с положительными элементами. Для любой матрицы A будем через $A_{i\cdot}$ обозначать i-ю строку A, через $A_{\cdot j}$ — ее j-й столбец, а через A_{ij} — стоящий на их пересечении элемент.

Положим для $m \times n$-матриц A и B

$$(A \,\overline{m}\, B)_{ij} = \max\,\{A_{ij}, B_{ij}\} \quad (\text{максимизация}),$$
$$(A \,\underline{m}\, B)_{ij} = \min\,\{A_{ij}, B_{ij}\} \quad (\text{минимизация}),$$

а для $m \times n$-матрицы A и $n \times p$-матрицы B

$$(A \,\overline{\circ}\, B)_{ij} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} A_{ik}B_{kj} \quad (\text{максимальное умножение}),$$
$$(A \,\underline{\circ}\, B)_{ij} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} A_{ik}B_{kj} \quad (\text{минимальное умножение}).$$

Для краткости будем рассуждения, справедливые в равной мере для максимизации и минимизации матриц, проводить, употребляя термин экстремизация и пользуясь для нее знаком $\overline{\underline{m}}$. Аналогично будем говорить об экстремальном умножении матриц, обозначая его знаком $\overline{\underline{\circ}}$. Здесь мы пользуемся мультипликативной терминологией как более привычной. Ввиду монотонности логарифма мы можем перейти, если это покажется удобным, к аддитивной системе записи.

2. Основные свойства экстремальных операций.

1^0. $A \mathbin{\overline{\underline{m}}} A = A$.

2^0. $A \mathbin{\overline{\underline{m}}} B = B \mathbin{\overline{\underline{m}}} A$.

3^0. $A \mathbin{\overline{\underline{m}}} (B \mathbin{\overline{\underline{m}}} C) = (A \mathbin{\overline{\underline{m}}} B) \mathbin{\overline{\underline{m}}} C$.

4^0. $A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} (B \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} C) = (A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} B) \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} C$.

Сказанное дает нам основание ввести обозначения

$$\mathop{\overline{\underline{\boldsymbol{m}}}}_{k=1}^{n} A^{(k)}, \qquad \mathop{\overline{\underline{\circ}}}_{k=1}^{n} A^{(k)}, \qquad A^{\overline{\underline{\circ}}\, n}$$

соответственно для экстремизации и экстремального произведения нескольких матриц и экстремальной степени матрицы.

5^0. $A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} (B \mathbin{\overline{\underline{m}}} C) = (A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} B) \mathbin{\overline{\underline{m}}} (A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} C)$.

6^0. $(A \mathbin{\overline{\underline{m}}} B) \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} C = (A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} C) \mathbin{\overline{\underline{m}}} (B \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} C)$.

7^0. $\lambda (A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} B) = \lambda A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} B = A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} \lambda B \quad (\lambda > 0)$.

8^0. $\lambda (A \mathbin{\overline{\underline{m}}} B) = \lambda A \mathbin{\overline{\underline{m}}} \lambda B \quad (\lambda > 0)$.

9^0. $A \mathbin{\overline{\circ}} (B \mathbin{\underline{\circ}} C) \leqq (A \mathbin{\overline{\circ}} B) \mathbin{\underline{\circ}} C$.

10^0. $A \mathbin{\underline{\circ}} (B \mathbin{\overline{\circ}} C) \geqq (A \mathbin{\underline{\circ}} B) \mathbin{\overline{\circ}} C$.

В пп. 9^0 и 10^0 неравенства понимаются поэлементно. Заметим, что эти неравенства отражают важное в теории игр неравенство минимакса.

Так как все элементы матрицы A положительны, можно говорить о матрице A^-, экстремально обратной к A:

$$(A^-)_{ij} = \frac{1}{A_{ji}}.$$

Операция экстремального обращения обладает следующими свойствами:

11^0. $A^{--} = A$.

12^0. $(A \mathbin{\overline{\circ}} B)^- = B^- \mathbin{\underline{\circ}} A^-$.

13^0. $(A \mathbin{\underline{\circ}} B)^- = B^- \mathbin{\overline{\circ}} A^-$.

14^0. $(A \mathbin{\overline{m}} B)^- = A^- \mathbin{\underline{m}} B^-$.

15^0. $(A \mathbin{\underline{m}} B)^- = A^- \mathbin{\overline{m}} B^-$.

16^0. Если $A \mathbin{\overline{\circ}} B = C$, то $B \leqq A^- \mathbin{\underline{\circ}} C$ и $A \leqq C \mathbin{\underline{\circ}} B^-$.

17^0. Если $A \mathbin{\underline{\circ}} B = C$, то $B \geqq A^- \mathbin{\overline{\circ}} C$ и $A \geqq C \mathbin{\overline{\circ}} B^-$.

3. Несколько практических задач, формулируемых в терминах экстремальных операций.

I. Предположим, что n видов сырья $C_1, \ldots, C_n$ могут использоваться в любом из m производственных процессов $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$, дающих соответственно окончательные продукты $P_1, \ldots, P_m$. Будем считать, что, употребляя сырье C_j в процессе Π_i, мы из каждой единицы C_j при достаточном количестве всех остальных видов сырья получим A_{ij} единиц продукта P_i. Примем, кроме того, что для протекания каждого процесса необходимо и достаточно наличие всех видов сырья. Определить минимальные количества X_j сырья C_j для того, чтобы пустив в ход любой из процессов Π_i, получить в результате ровно B_i единиц продукта P_i.

Очевидно, вектор X искомых количеств сырья должен удовлетворять уравнению $A \mathbin{\underline{\circ}} X = B$.

II. Некоторая техническая система состоит из n узлов, каждый из которых характеризуется одним параметром X_j ($j = 1, \ldots, n$). Предположим, что системе предстоит работать в любом из m режимов, причем нагрузка, выдерживаемая узлом j в условиях режима i, пропорциональна величине параметра узла, а коэффициент пропорциональности равен A_{ij}.

Для того чтобы в режиме i каждый узел системы был способен выдержать нагрузку B_i, должно быть $A \mathbin{\underline{\circ}} X \geqq B$.

III. Некоторая система может находиться в одном из m состояний $C_1, \ldots, C_m$. Переходы системы из одного состояния в другое могут совершаться в дискретные моменты времени $1, 2, \ldots, n$, причем переход в момент t из C_i в C_j требует затрат $a_{ij}^{(t)}$.

Пусть в момент 0 система находится в состоянии C_i. Как следует изменять в моменты $1, 2, \ldots, n$ состояния системы, чтобы в момент n оказаться в состоянии C_j, а суммарные затраты были бы минимальными?

Очевидно, минимальные суммарные затраты равны

$$\log\left(\underset{t=1}{\overset{n}{\circ}} A^{(t)}\right)_{ij}, \text{ где } A_{ij}^{(t)} = e^{a_{ij}^{(t)}}.$$

Ясно, что для задач такого рода аддитивная запись предпочтительнее.

4. Разрешимость экстремальных уравнений. Возьмем уравнение $A \overset{\circ}{=} X = B$. Обозначим через S_j ($j = 1, \ldots, n$) множество всех таких строк s $m \times n$-матрицы A, что

$$\frac{A_{sj}}{B_s} = \underset{i=1}{\overset{m}{\underline{m}}} \frac{A_{ij}}{B_i}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение $A \overset{\circ}{=} X = B$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы множества $S_1, \ldots, S_n$ составляли покрытие множества всех строк матрицы A.*

Множество векторов $\mathfrak{X}$ называется экстремально выпуклым, если из $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{X}$ следует $\lambda_1 X^{(1)} \overline{m} \lambda_2 X^{(2)} \in \mathfrak{X}$ при любых $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$, для которых $\lambda_1 \overline{m} \lambda_2 = 1$.

Теорема 2. *Множество всех решений уравнения $A \overset{\circ}{=} X = B$ является экстремально выпуклым. Его можно эффективно описать.*

5. Экстремальные собственные числа и собственные векторы. Если для квадратной матрицы A и вектора X имеет место равенство $A \overset{\circ}{=} X = \lambda X$, то λ называется экстремальным собственным числом матрицы A, а X — ее экстремальным собственным вектором.

Теорема 3. *Каждая квадратная $m \times m$-матрица A имеет единственное экстремальное собственное число $\bar{\lambda}$ и*

$$\bar{\lambda} = \overline{m} \sqrt[k]{A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_k i_2}}, \qquad (*)$$

где экстремизация производится по всем $1 \leqq k \leqq m$ и всем циклическим последовательностям чисел $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k, i_1$ из $1, 2, \ldots, m$.

Циклы, для которых в $(*)$ достигается экстремум, называются экстремальными собственными циклами матрицы A.

Множество $\mathfrak{X}$ называется экстремально выпуклым конусом, если из $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{X}$ следует $\lambda_1 X^{(1)} \overline{m} \lambda_2 X^{(2)} \in \mathfrak{X}$ при любых $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$.

Теорема 4. *Множество экстремальных собственных векторов любой матрицы является непустым экстремально выпуклым конусом.*

Для вычисления экстремальных собственных чисел матрицы можно воспользоваться соотношением

$$\bar{\lambda} = \underset{1 \leq i,\, k \leq m}{\overline{m}} \sqrt[k]{(A^{\overset{\circ}{=} k})_{ii}}.$$

Анализ процесса получения экстремумов в последнем равенстве приводит к определению всех экстремальных циклов A. Кроме того, это может нам дать все отношения компонент экстремальных собственных векторов вида $X_s : X_r$, если r и s принадлежат одному и тому же собственному экстремальному циклу.

Пусть отношения $X_s : X_r = \alpha_s$ при фиксированном r для некоторых s определены. Будем понимать равенство $A \overset{\circ}{=} X = \lambda X$ как систему соотношений

$$A_{i \cdot} \overset{\circ}{=} X = \lambda X_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Так как для собственных экстремальных векторов $X_s = \alpha_s X_r$, мы можем все переменные X_s (кроме, разумеется, самого X_r) из этих соотношений исключить. Заменяя все экстремизируемые члены $A_{is}X_s$ на $\underset{s}{\overline{\underline{\boldsymbol{m}}}}\, A_{is}\alpha_s X_r$ (что является в нашем случае точным аналогом приведения подобных членов) и заменяя все соотношения вида $A_{s\cdot}X = \lambda\alpha_s X_r$ на одно:

$$\overset{m}{\underset{l=1}{\overline{\underline{\boldsymbol{m}}}}} \left(A_{rl} X_r \,\overline{\underline{m}}\, \left(\underset{s}{\overline{\underline{\boldsymbol{m}}}} \frac{A_{sl}}{\alpha_s} \right) X_l \right) = \lambda X_r,$$

мы можем свести первоначальную задачу к решению уравнения вида $A^* \,\overline{\underline{\circ}}\, X = \lambda X$, где все экстремальные собственные циклы A^* одночленные. (Матрицу A^*, обладающую этим свойством, назовем петлевой.)

Теорема 5. *Какова бы ни была петлевая матрица A, существует такое натуральное r, что $A^{\overline{\underline{\circ}}\, r+1} = \lambda A^{\overline{\underline{\circ}}\, r}$.*

Это число r (экстремальный порядок A) эффективно оценивается сверху и может быть в любом случае найдено.

Ясно, что столбцы матрицы $A^{\overline{\underline{\circ}}\, r}$ являются экстремальными собственными векторами A. Нетрудно показать, что натянутый на них экстремально выпуклый конус является множеством всех экстремальных собственных векторов A.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 III 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Fenchel, Lecture Notes, Princeton, 1953. [2] R. Bellman, Quart. Appl. Math., **16**, 87 (1958). [3] R. Bellman, W. Karush, Bull. Am. Math. Soc., **67**, 501 (1961). [4] R. Bellman, W. Karush, J. Soc. Industr. Appl. Math., **10**, 550 (1962). [5] И. В. Романовский, Вестн. ЛГУ, № 13, 148 (1962). [6] S. N. Pandit, J. Soc. Industr. Appl. Math., **9**, 632 (1961).