Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 6 (1970) 4/5, 303–312

Экстремальная алгебра неотрицательных матриц

Николай Николаевич Воробьев[1])

0. В статье [1] автором были введены максимальное и минимальное произведения n-векторов $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, определяемые соотношениями

$$X \overline{\circ} Y = \max_i X_i Y_i ,$$

$$X \underline{\circ} Y = \min_i X_i Y_i .$$

Далее, как и в [1], прилагательное „экстремальный" может употребляться в любом из двух значений, „максимальной" и „минимальный" (но, разумеется, каждый раз только в одном значении). Экстремальное произведение векторов X и Y обозначается, как $X \overline{\underline{\circ}} Y$.

0.1. Векторы X и Y называются *экстремально ортогональными*, если $X \overline{\underline{\circ}} Y = 0$.

Максимальная ортогональность векторов X и Y означает, что из двух одноименных компонент X и Y хотя бы одна равна нулю. Минимальная их ортогональность означает, что хотя бы один из векторов имеет нулевую компоненту.

0.2. Операция экстремального произведения векторов позволяет определить *экстремальное произведение* матриц A и B, как

$$(A \overline{\underline{\circ}} B)_{ij} = A_{i.} \overline{\underline{\circ}} B_{.j} ,$$

где $A_{i.}$ — i-ая строка матрицы A, а $B_{.j}$ — j-ый столбец матрицы B.

0.3. Если A — некоторая $(n \times n)$-матрица, X — n-вектор, а λ — вещественное число, для которых

$$A \overline{\underline{\circ}} X = \lambda X ,$$

то λ называется *экстремальным собственным числом* матрицы A, а X — ее *экстремальным собственным вектором*, соответствующим экстремальному собственному числу λ. Максимальное собственное число A мы будем иногда обозначать через $\bar{\lambda}(A)$, а множество всех соответствующих ему векторов — через $\mathfrak{X}_{\bar{\lambda}}(A)$.

Если каждому номеру строки i матрицы A поставить в соответствие все номера j, для которых

$$A_{ij} X_j = \bar{\lambda} X_i$$

---

[1]) Центральный Экономико-математический институт Академии Наук СССР (директор: академик Н. П. Федоренко), Ленинградское отделение.

то мы получим ориентированный граф, который обозначается через $\overline{\Gamma}_{A,X}$. Частичный подграф графа $\overline{\Gamma}_{A,X}$, состоящий из всех его контуров, обозначается через $\overline{\Gamma}^{*}_{A,X}$.

0.4. В [1] рассматривались матрицы с положительными элементами. Для них было установлено существование экстремальных собственных чисел (эти числа, как максимальное, так и минимальное, оказываются единственными) и собственных векторов, а также указаны алгорифмы нахождения экстремальных собственных чисел и описания множества всех экстремальных собственных векторов.

0.5. В данной работе эта же задача решается для случая, когда элементы матрицы являются неотрицательными (далее в этой статье будут рассматриваться только такие матрицы). В экстремальной алгебре неотрицательных матриц положительные матрицы играют роль, сходную с ролью невырожденных матриц в классической линейной алгебре матриц.

1. Выясним условия, при которых матрица A может иметь нулевые экстремальные собственные числа, т.е., условия, при которых найдется такой ненулевой вектор X, что

$$A \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} X = 0\,. \tag{1}$$

Эти условия описываются следующей теоремой.

Теорема. *Для того, чтобы экстремальный собственный вектор X матрицы A соответствовал ее нулевому экстремальному собственному числу, необходимо и достаточно, чтобы он был экстремально ортогонален каждой ее строке $A_{i.}$.*

Эта теорема вытекает из того, что векторное равенство (1) равносильно выполнению при любом i

$$A_{i.} \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} X = 0\,. \tag{2}$$

Дальнейшие рассуждения будут проводиться раздельно для случаев максимального и минимального собственных чисел.

2. Случай нулевого минимального собственного числа весьма прост, ибо равенства (2) записываются в этом случае, как

$$A_{i.} \mathrel{\underline{\circ}} X = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и означают, что либо X имеет нулевую компоненту, либо каждая строка матрицы A содержит нулевой элемент. Поэтому вся соответствующая теория полностью описывается следующими утверждениями, которые после всего сказанного достаточно очевидны.

2.1. Каждая матрица имеет нуль своим минимальным собственным числом.

2.2. Если матрица A имеет хотя бы один нулевой элемент, то она не имеет положительных минимальных собственных чисел.

2.3. Если матрица A имеет хотя бы одну положительную строку, то нулевому минимальному собственному числу соответствуют все векторы, имеющие хотя бы одну нулевую компоненту и только они.

2.4. Если в каждой строке матрицы A имеются нули, то все векторы являются для A минимальными собственными векторами.

2.5. В соответствии со сказанным нам остается исследовать минимальные собственные числа и векторы лишь для матриц, все элементы которых положительны. Это исследование проведено в [1].

2.6. Заметим, что согласно п. 2.3 для матрицы с положительными элементами все минимальные собственные векторы, соответствующие минимальному собственному числу, не имеют нулевых компонент.

3. Случай нулевого максимального собственного числа несколько сложнее и потребует более обстоятельных рассуждений. Начнем с перечисления нескольких непосредственных следствий теоремы п. 1. В максимальном случае формула (2) переписывается, как

$$A_{i.} \mathbin{\overline{\circ}} X = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и означает, что если некоторая строка A имеет ненулевой элемент, то соответствующая компонента X равна нулю. Следовательно каждой ненулевой компоненте X соответствует полностью нулевой столбец матрицы A.

3.1. Для того, чтобы матрица A имела нулевое максимальное собственное число, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один ее столбец состоял из одних нулей.

3.2. Матрица, в каждом столбце которой имеется положительный элемент, не имеет нулевого максимального собственного числа.

3.3. Если матрица A ненулевая, то вектор с положительными компонентами не может принадлежать ее нулевому максимальному собственному числу.

4. Наметим процесс нахождения максимальных собственных чисел и соответствующих им векторов для матрицы A, если среди ее максимальных собственных чисел имеется нуль. Из сказанного в п. 3.1 следует, что некоторое непустое множество столбцов A состоит из нулей. Будем для определенности считать, что нулевыми являются последние столбцы матрицы, и что матрица A, таким образом, имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{(11)} & \mathbf{0} \\ \hline A^{(12)} & \mathbf{0} \end{array}\right), \tag{3}$$

где подматрица $A^{(11)}$-квадратная, а нули $\mathbf{0}$ обозначают соответствующие нулевые подматрицы (мы считаем, что все нулевые столбцы A уже выделены).

Представим произвольный максимальный собственный вектор X матрицы A в виде $(X^{(1)}, X^{(2)})$, где компоненты, составляющие $X^{(1)}$, соответствуют первым строкам матрицы A, а компоненты $X^{(2)}$ — последним. Пусть X соответствует собственному максимальному числу $\bar{\lambda}$. Мы имеем:

$$\begin{pmatrix} A^{(11)} & \mathbf{0} \\ A^{(21)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\circ} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Но

$$\begin{pmatrix} A^{(11)} & \mathbf{0} \\ A^{(21)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\circ} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(11)} \bar{\circ} X^{(1)} \\ A^{(21)} \bar{\circ} X^{(2)} \end{pmatrix}$$

и сопоставление с (4) дает нам

$$A^{(11)} \bar{\circ} X^{(1)} = \bar{\lambda}\, X^{(1)}, \tag{5}$$

$$A^{(21)} \bar{\circ} X^{(1)} = \bar{\lambda}\, X^{(2)}. \tag{6}$$

Если бы вектор $X^{(1)}$ был нулевым, то на основании (6) нулевым оказался бы и вектор $X^{(2)}$ и тем самым весь вектор X, чего однако, нет. Следовательно, вектор $X^{(1)}$ ненулевой, и является собственным максимальным вектором матрицы $A^{(11)}$, принадлежащим $\bar{\lambda}$; тем самым $\bar{\lambda}$ оказывается максимальным собственным числом матрицы $A^{(11)}$.

Наоборот, каковы бы ни были

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A^{(11)}) \neq 0$$

и

$$X^{(1)} \in \bar{\mathfrak{X}}_{\bar{\lambda}}(A^{(11)}),$$

мы можем по (5) и (6) получить вектор $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{X}}(A)$, соответствующий числу $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A)$. Таким образом, если $A^{(11)}$ не имеет нулевого максимального собственного числа, то все максимальные собственные числа $A^{(11)}$ являются таковыми и для A, а все максимальные собственные векторы A описываются через максимальные собственные векторы $A^{(11)}$ посредством равенства (6).

Остается рассмотреть случай, когда $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A^{(11)}) = 0$. В этом случае матрица $A^{(11)}$ по п. 3.1 должна иметь нулевые столбцы и представляться в виде, аналогичном (3), а ее анализ сводится к анализу той ее подматрицы, которая окажется в левом верхнем углу. Продолжая, если нужно, этот процесс, мы получим представление матрицы в следующем полураспавшемся виде:

$$A = \begin{Vmatrix} A^{(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\ \mathbf{0} \\ A^{(21)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\ \mathbf{0} \\ A^{(31)} & A^{(32)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\ \mathbf{0} \\ A^{(41)} & A^{(42)} & A^{(43)} & \dots & \mathbf{0}\ \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(k-1,\,1)} & A^{(k-1,\,2)} & A^{(k-1,\,3)} & \dots & \mathbf{0}\ \mathbf{0} \\ A^{(k\,1)} & A^{(k\,2)} & A^{(k\,3)} & \dots & \mathbf{0}\ \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

где все диагональные клетки, кроме $A^{(11)}$-нулевые, а клетки, стоящие непосредственно под диагональными нулевыми клетками, не имеют нулевых столбцов (ибо на каждом шаге мы выделяли *все* нулевые столбцы интересующих нас подматриц). Здесь матрица $A^{(11)}$

нулевых столбцов уже не имеет. Поэтому все ее максимальные собственные числа положительны. Пусть $\bar{\lambda}$ — одно из них. Используя проведенные выше рассуждения в качестве индуктивного перехода, мы убеждаемся в том, что $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A)$.

Пусть $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)})$ — соответствующий этому числу собственный максимальный вектор A. Выписывая по-клеточно равенство $A \mathbin{\bar{\circ}} X = \lambda X$, мы получаем

$$\begin{aligned}
&A^{(11)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(1)} &&= \bar{\lambda} X^{(1)}\\
&A^{(21)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(1)} &&= \bar{\lambda} X^{(2)}\\
&(A^{(21)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(1)}) \vee (A^{(32)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(2)}) &&= \bar{\lambda} X^{(3)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(A^{(k\,1)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(1)}) \vee (A^{(k\,2)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(2)}) \vee \cdots \vee (A^{(k,\,k-1)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(k-1)}) &&= \bar{\lambda} X^{(k)}
\end{aligned}$$

Здесь $\bar{\lambda} \neq 0$. Поэтому, если вектор $X^{(1)}$ известен, то мы можем из этих равенств однозначно определить один за другим все векторы $X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots, X^{(k)}$ и тем самым построить вектор X. Остается заметить, что $X^{(1)} \in \bar{\mathfrak{X}}(A^{(11)})$.

4.1. Таким образом, задача определения всех максимальных собственных векторов для матрицы, содержащей нулевые столбцы, сводится к аналогичной задаче для матрицы, которая таких столбцов не имеет (и тем самым имеет только положительные максимальные собственные числа).

5. Пусть матрица A не имеет нулевых столбцов, а $\bar{\lambda}$ и X соответственно ее максимальное собственное число и соответствующий ему вектор:

$$A \mathbin{\bar{\circ}} X = \bar{\lambda} X \tag{7}$$

(из п. 3.2 следует, что $\bar{\lambda} \neq 0$). Пусть вектор X имеет нулевые компоненты. Применяя, если нужно изменение нумерации строк A, будем считать, что X имеет вид $(X^{(1)}, X^{(2)})$, где вектор $X^{(1)}$ — нулевой, а вектор $X^{(2)}$ нулевых компонент не имеет. Соответственно этому разбиению компонент представим A в клеточном виде и перепишем соотношение (7) как

$$\begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{pmatrix} \mathbin{\bar{\circ}} \begin{pmatrix} 0 \\ X^{(2)} \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ X^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Выполняя слева экстремальное умножение, мы получаем:

$$A^{(12)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(2)} = 0\,, \tag{8}$$

$$A^{(22)} \mathbin{\bar{\circ}} X^{(2)} = \bar{\lambda} X^{(2)}\,. \tag{9}$$

Поскольку вектор $X^{(2)}$ ненулевой, из (8) следует, что

$$0 = \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A^{(12)})$$

и

$$X \in \bar{\mathfrak{X}}_{\bar{\lambda}}\,(A^{(12)})\,.$$

Так как $X^{(2)}$ не имеет нулевых компонент, из п. 3. 3. следует, что матрица $A^{(12)}$ нулевая. Это значит, что матрица A должна полураспадаться:

$$A = \begin{pmatrix} A^{(11)} & 0 \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Пусть теперь, наоборот, матрица A полураспадается согласно (10), $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A^{(22)})$ и $X^{(2)} \in \bar{\mathfrak{X}}(A^{(22)})$, причем X соответствует $\bar{\lambda}$. Заметим, что если бы было $\bar{\lambda} = 0$, то матрица $A^{(22)}$ имела бы нулевые столбцы. Но тогда в соответствии с (10) матрица A также имела бы такие столбцы, а это противоречит предположенному. Следовательно, $\bar{\lambda} \neq 0$.

Дополнив вектор $X^{(2)}$ спереди нулевыми компонентами до полного вектора X, мы, очевидно, получим (7), т.е., $\bar{\lambda}$ есть максимальное собственное число A, а X — соответствующий ему максимальный собственный вектор.

5.1. Таким образом, матрица A имеет максимальные собственные векторы с данным множеством нулевых компонент в том и только том случае, когда она соответствующим образом полураспадается. Все такие векторы можно получить путем приписывания нулевых компонент к каждому из положительных собственных максимальных векторов соответствующей диагональной клетки. Если максимальный собственный вектор $X^{(2)}$ клетки соответствует максимальному собственному числу $\bar{\lambda}$ этой клетки, то $\bar{\lambda}$ является максимальным собственным числом всей матрицы, и полученный из $X^{(2)}$ собственный максимальный вектор также соответствует $\bar{\lambda}$.

Следовательно, задача определения всех максимальных собственных чисел и соответствующих им максимальных собственных векторов сводится к задаче определения всех положительных максимальных собственных векторов и тех максимальных (очевидно, ненулевых) собственных чисел, которым эти векторы соответствуют.

6. Для решения этой последней задачи докажем следующую теорему.

Теорема. *Все положительные собственные максимальные векторы матрицы A соответствуют одному и тому же ее максимальному собственному числу $\bar{\lambda}(A)$. При этом*

$$\bar{\lambda}(A) = \bigvee_{1 \leqq i,\, k \leqq n} \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ}\, k})_{i\,i}}$$

Доказательство. Пусть $X \in \bar{\mathfrak{X}}(A)$. Возьмем произвольную циклическую последовательность в графе $\bar{\Gamma}_{A,\,X}$:

$$i = i_1,\ i_2, \ldots, i_{k+1} = i\,. \tag{13}$$

Мы имеем для $l = 1, \ldots, k$

$$A_{i_l\, i_{l+1}} X_{i_{l+1}} \leqq \bigvee_{i_{l+1}} A_{i_l\, i_{l+1}} X_{i_{l+1}} \leqq \lambda\, X_{i_l}\,, \tag{14}$$

или, перемножая все эти неравенства почленно и сокращая на положительное произведение $X_{i_1} \ldots X_{i_k}$, мы получаем

$$\prod_{l=1}^{k} A_{i_l\, i_{l+1}} \leqq \bar{\lambda}^k .$$

Так как это неравенство справедливо для любой последовательности вида (13), мы можем перейти к максимуму по всем ее промежуточным членам, всем i и всем длинам k:

$$\bigvee_{1\leqq k\leqq n}\ \bigvee_{1\leqq i\leqq n}\ \bigvee_{i_2,\ldots,i_k}\ \prod_{l=1}^{k} A_{i_l\, i_{l+1}} \leqq \bar{\lambda}^k , \tag{15}$$

Но

$$\bigvee_{i_2,\ldots,i_k}\ \prod_{l=1}^{k} A_{i_l\, i_{l+1}} = (A^{\bar{\circ} k})_{i\,i} .$$

Поэтому (15) можно переписать как

$$\bigvee_{1\leqq i,\ k\leqq n} (A^{\bar{\circ} k})_{i\,i} \leqq \bar{\lambda}^k ,$$

откуда

$$\bigvee_{1\leqq i,\ k\leqq n} \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{i\,i}} \leqq \bar{\lambda} . \tag{16}$$

Пусть теперь последовательность (13) является контуром какого-либо из графов $\bar{\Gamma}^*_{A,X}$. В этой случае для всех $l = 1, \ldots, k$

$$A_{i_l\, i_{l+1}} X_{i_{l+1}} = \bar{\lambda}\, X_{i_{l+1}} .$$

Снова производя перемножение и сокращение, мы получим

$$\prod_{l=1}^{k} A_{i_l\, i_{l+1}} = \bar{\lambda}^k ,$$

и, следовательно,

$$\bigvee_{1\leqq k\leqq n}\ \bigvee_{1\leqq i\leqq n}\ \bigvee_{i_2,\ldots,i_k}\ \prod_{l=1}^{k} A_{i_l\, i_{l+1}} \geqq \bar{\lambda}^k ,$$

откуда аналогично предыдущему

$$\bigvee_{1\leqq i,\ k\leqq n} \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{i\,i}} \geqq \lambda . \tag{17}$$

Сопоставление (16) и (17) дает нам требуемое.

7. Нам остается описать все положительные максимальные собственные векторы заданной матрицы A. Равенства вида (1) показывают, что все отношения между компонентами любого собственного экстремального вектора X могут быть вычислены как отношения между произведениями входящих в эти равенства чисел A_{ij} и некоторых степеней собственного числа $\bar{\lambda}$ (подробнее об этом см. [1]). Но все числа A_{ij}, входящие в равенства (1) должны быть положительными, а прочие элементы A в вычислении отношений между компонентами X не участвуют. Поэтому положительность этих остальных элементов не является существенной, и все рассуждения; проведенные по этому поводу в [1] для положительных матриц, остаются в силе и в нашем случае.

В частности, учитывая также все сказанное выше, из существования максимальных собственных векторов *у* положительных матриц следует их существование и *у* произвольных неотрицательных матриц.

8. При практическом нахождении всех максимальных собственных чисел для достаточно большой матрицы следует считаться с возможностью весьма разнообразных полураспадений матрицы и тем самым с большим числом вариантов расчетов. Естественны поэтому поиски таких частных форм матриц, для которых эти расчеты существенно сокращаются.

Одним из таких частных случаев оказывается тот, когда матрица распадается, т.е., когда обнаруживается такое ее клеточное представление, при котором все клетки, кроме диагональных квадратных являются нулевыми (вместе с тем мы будем считать, что диагональные блоки не имеют нулевых столбцов).

8.1. Теорема. *Если матрица A распадается*:

$$A = \begin{pmatrix} A^{(11)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(22)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A^{(kk)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

то

1. *Для того, чтобы $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(A)$ необходимо и достаточно, чтобы было $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(A^{(rr)})$ для некоторого $r = 1, 2, \dots, k$;*

2. *Для того, чтобы вектор $X \in \overline{\mathfrak{X}}(A)$ соответствовал числу $\overline{\lambda}$ необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}), \tag{12}$$

где для тех r, для которых $\overline{\lambda}(A^{(r)}) = \overline{\lambda}$, $X^{(r)}$ является произвольным максимальным собственным вектором, соответствующим $\overline{\lambda}$ (при этом все эти векторы $X^{(r)}$, кроме одного, могут быть нулевыми), а для тех r, для которых $\overline{\lambda}$ не является максимальным собственным числом $A^{(r)}$, вектор $X^{(r)}$ нулевой.

Доказательство. Пусть (12) есть максимальный собственный вектор (11). Это означает, что

$$A^{(r)} \circ X^{(r)} = \lambda X^{(r)} \qquad r = 1, \dots, k.$$

Но эти равенства возможны лишь в одном из двух случаев:

а) $X^{(r)} \in \overline{\mathfrak{X}}(A^{(r)})$ и соответствует $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(A^{(r)})$;

б) вектор $X^{(r)}$ — нулевой.

Достаточность доказывается непосредственной проверкой.

Литература

[1] Воробьев Н. Н., Экстремальная алгебра положительных матриц. EIK **3** (1967) 1, 39-72.

Резюме

Описывается нахождение экстремальных собственных чисел и экстремальных векторов для произвольных неотрицательных матриц.

Kurzfassung

Es wird die Bestimmung der extremalen Eigenwerte und extremalen Eigenvektoren beliebiger nicht-negativer Matrizen beschrieben.

Abstract

The evaluation of the extremal eigenvalues and extremal eigenvectors of an arbitrary non-negative matrix is described.

(Поступило 15 IV 1969)

Адрес автора:

Проф. докт. Н. Н. Воробьев
Центральный экономико-математический институт
АН СССР (Ленинградское отделение)
Ул. Чайковского 1
г. Ленинград Д-187
СССР