Ляле, чтобы доказать теорему Гамильтона-Кэли
с нами.
25 дек 1971.

EIK 3 (1967) Seite 39 – 71

Экстремальная алгебра положительных матриц

Николай Николаевич Воробьев[1])

Классическая математика возникла и развилась на основе физико-технических задач, или даже, говоря более конкретно, в результате точных описаний расположений и перемещений физических тел в физическом пространстве. В связи с этим большинство важнейших понятий классической математики и основных рассматриваемых в ней соотношений несет на себе достаточно заметный отпечаток физических представлений. Так, интеграл естественнее всего интерпретируется как площадь, производная — как скорость, непрерывность и дифференцируемость функций отражают непрерывный ход пространственно-временных процессов и инерционность участвующих в них объектов, а большинство уравнений (особенно уравнений в частных производных) уже самими названиями указывают на свое физическое происхождение.

Необходимо заметить, что понятия и соотношения классической математики формировались в то время, когда и физическое пространство, и физические тела в нем понимались весьма непосредственным, наглядным образом. Они понимались тогда (да, впрочем, и сейчас понимаются) существенно более простыми, чем являются в действительности. Преодоление этой „скованности наглядностью" осуществлялось путем развития математических абстракций. Первый удар по наглядности был нанесен неевклидовой геометрией, которая не только разработала теорию геометрических систем, противоречивших, казалось бы, повседневному опыту, но и создала необходимые теоретические предпосылки для формулирования впоследствии основных идей теории относительности. Весьма плодотворным оказалось рассмотрение многомерных векторных пространств (на первых порах как фазовых пространств), порвавшее с традициями трехмерности. Долгое время наши представления находились в плену своеобразного варианта наглядности — „жесткого", лапласовского детерминизма. Освобождению из этого плена мы обязаны в значительной степени теории вероятностей. Достаточно общее понимание о движении, как о преобразовании, связано с теорией групп. Аксиоматический метод указывает нам новые пути преодоления привычных для нас представлений, приобретших силу предрассудков.

Однако, физическая наглядность является еще более цепкой, чем это кажется на первый взгляд. Нередко наши общие концепции оказываются лишь квинт-эссенцией тех же привычных и наглядных черт, только очищенных от второстепенных деталей. Недаром сейчас эти концепции явно недостаточны для современной физики, в которой стали популярны поиски „сумасшедших" идей.

---

[1]) Центральный экономико-математический институт АН СССР (Директор: Акад. Н. П. Федоренко).

Тем более недостаточным представляется система разработанных математических понятий и основанный на них математический аппарат для разработки теорий, по самому своему существу более сложных, чем физические. К ним относятся, прежде всего, теории принятия людьми и коллективами решений для осуществления поставленных целей. Для решения стоящих перед этими теориями задач необходима новая математика.

Было бы неправильным считать, что дело может ограничиться возникновением какой-то новой математической теории, некоторого нового ,,исчисления'', или, скажем, существенным прогрессом в одной из существующих отраслей математики, например, в алгебре или в теории вероятностей. Более того, даже создание целой новой математической дисциплины типа теории игр не является достаточным. Только перестройка всей математической науки, приспособление всех ее разделов к новым задачам даст надежду на их исчерпывающее решение.

Естественно, что эта новая математика будет использовать методологические принципы всех традиционных математических дисциплин и поэтому окажется не менее разнообразной, чем классическая математика. Она воспроизведет в своих рамках все обычные типы математических рассуждений и в этом смысле можно предполагать появление новой алгебры и новой геометрии, новой теории функций и новой теории вероятностей, нового гармонического анализа и т.д.

Сейчас можно пока лишь весьма гадательно судить о путях перестройки математики и о том окончательном виде, который она в результате этой перестройки примет. Однако, одна черта этой будущей математики представляется несомненной. Важную роль будут в ней играть экстремальные задачи, удельный вес которых уже сейчас возрастает в математике буквально с каждым годом.

Это явление представляется вполне естественным и даже закономерным. Проанализируем его несколько подробнее.

Рассматриваемые в математике действия отражают ее общую научно-прикладную направленность. Так, оценка совокупного влияния большого количества факторов, достаточно однородных по своей природе, является чрезвычайно важным и часто встречающимся элементом количественного научного познания действительности. Поэтому операция сложения вместе с ее далеко зашедшими обобщениями — интегрированием и суммированием рядов — заняла исключительное место как в различных математических теориях, так и в их практических приложениях.

Это обстоятельство нашло отражение даже в столь абстрактных математических дисциплинах как алгебра. Аксиомы операции в теории групп отражают основные свойства именно действий, напоминающих сложение. (Совершенно иной характер имеет аксиоматика теории структур, но к ней мы вернемся несколько позднее.)

Своеобразие развития математики за последнее время определяется тем общим положением, что процесс научного познания оказывается лишь одним из этапов более широкого процесса, завершающегося фактическим осуществлением той цели, ради которой, в сущности, и предпринимаются те или иные исследования. Это, в свою очередь, приводит к тому, что целью науки на современном ее этапе является не только и не столько получение информации об изучаемом этой наукой объекте, но и выработка рекомендаций по принятию решений, касающихся этого объекта.

Центр тяжести должен быть перенесен с более пассивного, познавательного этапа научного исследования на его более активный этап, на этап принятия решений. Весь комплекс вопросов, связанных с количественной теорией принятия решений на основе получаемой и перерабатываемой информации, сложился за последние десятилетия в самостоятельную научную дисциплину — исследование операций.

В связи со всем сказанным, и математика должна обслуживать теперь не только процесс познания, но и весь общий процесс, доходящий до практических реализаций поставленных целей. При этом важной сферой ее приложений оказывается именно последний из теоретических этапов этого общего процесса, этап выбора решений, этап, относяшийся к исследованию операций.

Приобретая существенно новую область приложений, математика уже не может ограничиться сложившимся аппаратом, приспособленным для решения задач по преимуществу познавательного характера. Параллельно ему в математике начинает разрабатываться новый аппарат, ориентированный специфику задач исследования операций.

Специфика же этих задач состоит прежде всего и главным образом в том, что решение, принимаемое для достижения некоторой цели должно быть в полном смысле слова наиболее целесообразным, т.е. должно соответствовать поставленной цели в максимальной степени. Поэтому в большинстве математических задач исследования операций участвует действие максимизации (или минимизации). Тем самым исследование операций заставляет математику особенно интенсивно развивать те ее направления, которые связаны с решением экстремальных задач. Это заставляет к числу основных математических операций присоединить не всегда формально очерченное (но содержательно достаточно понятное) действие выбора наибольшего и наименьшего числа из так или иначе описанного множества чисел.

Сами по себе экстремальные задачи отнюдь не являются математической новинкой. Задачи, в которых ищутся значения переменных, максимизирующие или минимизирующие в некоторой области данное выражение, а также задачи, в которых неизвестная величина или функция входит в задаваемое заранее соотношение под знаком максимума или минимума, уже давно рассматривались в математике. Отыскание наибольших и наименьших значений функций является одной из первых задач дифференциального исчисления, а нахождение функций, экстремизирующих функционалы интегрального типа, составляет предмет классического вариационного исчисления.

Связь экстремальных задач с принятием оптимальных решений настолько естественна, что даже в случае физических экстремальных задач исследователи прошлого усматривали реализацию целенаправленной деятельности. Так Эйлер в своем основополагающем труде по вариационному исчислению пишет: ,,. . . так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума" [1]. Поэтому ясно, что включение в сферу приложений математики общей теории принятия решений, развитие математических методов исследования операций не может не сопровождаться интенсивной разработкой аппарата для решения экстремальных задач.

В частности должен разрабатываться и алгебраический аппарат, т.е., теория алгебраических операций, сохраняющих в наиболее общей и абстрактной форме основные свойства важнейших действий, выполняемых при решении экстремальных задач: максимизации и минимизации. Сказанное означает, что эти свойства действий должны быть сформулированы в виде аксиом, определяющих соответствующую алгебраическую систему (абстрактную алгебру).

Такие алгебраические системы рассматривались и раньше. Достаточно указать на теорию юструктур [2] (особенно, на теорию линейных структур) и K-пространств [3]. Однако, потребности экстремальной математики не покрываются результатами этих теорий; последнее обстоятельство приводит к поискам новых алгебраических теорий.

При всем интересе, который вызывает построение абстрактных алгебр, начинать разработку соответствующей теории целесообразно не с абстрактных объектов, а с более конкретных, над которыми действия могут определяться не только аксиоматически, но и содержательно. К числу таких конкретных объектов относятся матрицы. Таким образом, построение экстремальной алгебры матриц представляется полезным и своевременным делом.

Кроме перечисленных теоретических соображений к построению такой теории приводит и необходимость обобщения ряда конкретных фактов, встречавшихся в различных прикладных математических теориях. Достаточно сослаться на статьи А.Г. Лунца [4] и Н. Г. Поварова [5] по теории релейно-контактных схем, а также А. Шимбела [6], Р. Беллмана и У. Каруша [7] и др., исследовавших вопросы путей в графе.

Рассмотрение этого круга задач с абстрактно-алгебраической точки зрения началось, по-видимому, с работы Гр. Моисила [8]. Идеи экстремального гармонического анализа развивались Беллманом и Карушем [7]. Множество матриц с двумя экстремальными действиями встречается у Пандита [9]. Аналогичные вопросы в духе динамического программирования разбирает И. В. Романовский [10]. Краткое изложение основных результатов данной статьи содержится в заметке автора [11].

1. Задачи, приводящие к системам линейных экстремальных уравнений

1.1. Предположим, что n видов сырья $C_1, \ldots, C_n$ могут использоваться в любом из m производственных процессов $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$, дающих соответственно окончательные продукты $P_1, \ldots, P_m$. Будем считать, что, употребляя сырье C_j в процессе Π_i, мы из каждой единицы C_j при достаточном количестве всех остальных видов сырья получим A_{ij} единиц продукта P_i.

Будем считать, что для хода каждого из процессов Π_i необходимы все виды сырья C_j. Примем также, что наличие всех видов сырья и достаточно для каждого процесса: процесс прекращается лишь с исчерпанием запасов одного из видов сырья.

Спрашивается, какие минимальные количества X_j сырья C_j каждого вида следует взять для того, чтобы можно было, пустив в ход любой из процессов Π_i, получить в результате B_i единиц продукта P_i.

Очевидно, искомые количества X_j должны удовлетворять системе уравнений:

$$\min_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \dots, m) . \tag{1}$$

Заметим, что по самой постановке вопроса в данной задаче $A_{ij} > 0$. В самом деле, если бы было $A_{ij} = 0$, то для получения продукта P_i участвующих в задаче видов сырья оказалось бы недостаточно.

1.2. Некоторая техническая система состоит из n узлов, каждый из которых характеризуется одним параметром X_j $(j = 1, \dots, n)$. Предположим, что системе предстоит работать в любом из m режимов, причем нагрузка, выдерживаемая узлом j в условиях режима i пропорциональна величине параметра узла, а коэффициент пропорциональности равен A_{ij}.

Спрашивается, какие минимальные значения каждого параметра следует принять для того, чтобы в режиме i каждый узел системы был способен выдержать нагрузку B_i.

Очевидно, ответ на наш вопрос также состоит в решении системы уравнений [1].

1.3. Успешное функционирование системы, работающей в m различных режимах, зависит от исправного состояния некоторого из ее устройств, которое может быть выполнено в одном из n вариантов. Выход j-го варианта устройства из строя в условиях i-го режима влечет с вероятностью A_{ij} выход из строя всей системы. Максимальные вероятности X_j выхода из строя j-го варианта устройства, при которых вероятности выхода из строя всей системы в i-ом режиме не превосходит B_i, должны удовлетворить уравнениям

$$\max_j A_{ij} X_j = B_i . \tag{2}$$

1.4. Пусть некоторая система может находится в одном из m состояний $C_1, \dots, C_m$. Переходы системы из одного состояния в другое могут совершаться в дискретные моменты времени $1, 2, 3, \dots, n$ причем переход в момент t из состояния C_i в состояние C_j требует затрат $a_{ij}^{(t)}$. Здесь $a_{ij}^{(t)}$ могут быть произволными вещественными числами. Если $a_{ij}^{(t)} < 0$, то эту величину можно интерпретировать как доход. Подчеркнем, что мы не делаем здесь предположения о том, что $a_{ii}^{(t)} = 0$: сохранение системой своего состояния может требовать издержек, а в других случаях — и приносить доход.

Спрашивается, как система, находящаяся в момент 0 в состоянии C_i, должна изменять в моменты $1, \dots, n$ свои состояния, чтобы в момент n оказаться в состоянии C_j, а суммарные затраты были минимальными?

Хотя эта задача и не сводится к системам уравнений типа (1) или (2), она, как будет далее выяснено, относится к тому же кругу вопросов.

1.5. Систему уравнений (1) и двойственную ей в некотором смысле систему (2) мы будем называть системами *линейных экстремальных* (или просто *экстремальных*) уравнений. Это название объясняется тем, что в левых частях этих уравнений стоит однородная форма переменных $X_1, \ldots, X_n$, содержащая операцию взятия экстремума.

Вся настоящая статья посвящена исследованию линейных экстремальных уравнений и связанному с ним матричному аппарату, во многом параллельному традиционному аппарату линейной алгебры.

Отдельные формулировки алгебры экстремальных форм напоминают предложения теории линейного программирования. Точное выявление связи этих двух теорий было бы весьма интересным.

2. Решение систем экстремальных уравнений

2.1. Пусть нам дана система экстремальных уравнений

$$\min_{1 \leq j \leq n} A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{3}$$

где все числа A_{ij} и B_i неотрицательны. Ясно, что в этом случае решение системы (если оно вообще существует) должно также состоять из неотрицательных чисел.

В тех случаях, когда числа A_{ij} и B_i положительны, бывает удобно, полагая $\log A_{ij} = a_{ij}$, $\log X_j = x_j$ и $\log B_i = b_i$, переписать уравнения (3) в следующем виде:

$$\min_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Здесь числа a_{ij}, b_i и x_j могут иметь уже произвольные знаки. Поэтому, полагая $-a_{ij} = a^*_{ij}$, $-b_i = b^*_i$ и $-x_j = x^*_j$ мы можем записать систему (4) как

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a^*_{ij} + x^*_j) = b^*_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

а, потенцируя, мы приходим к системе вида

$$\max_{1 \leq j \leq n} A^*_{ij} X^*_j = B^*_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Таким образом, в случае положительности коэффициентов и свободных членов в системе (3) достаточно исследовать только системы одного из видов (3)—(6). После этого условия разрешимости систем остальных трех видов и методика вычисления их решений будут получены автоматически. В случае же, когда некоторые из параметров системы обращаются в нуль, анализ систем вида (3) существенно отличается от систем вида (6).

Мы будем обычно иметь дело с системами экстремальных уравнений вида (3) и (6). Это, во-первых дает большую общность рассмотрений, а во-вторых, позволяет вести изложение в более привычной, мультипликативной терминологии. В отдельных случаях, однако, аддитивная терминология будет для нас даже предпочтительней. В этих случаях мы будем посредством логарифмирования переходить к системам типа (4) и (5).

2.2. Анализ систем (3) и (6) мы начнем с рассмотрения тех случаев, когда хотя бы один из свободных членов системы (3) обращается в нуль: $B_i = 0$. Это значит, что нулю равно одно из чисел

$$A_{i1} X_1\,, \quad A_{i2} X_2, \ldots, A_{in} X_n\,,$$

и потому либо один из коэффициентов

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}\,,$$

либо одно из неизвестных

$$X_1, X_2, \ldots, X_n\,.$$

Если нули имеются среди коэффициентов, то уравнение представляет собою тождество; оно не влияет ни на разрешимость ни на вид решений системы, состоящей из остальных уравнений, и поэтому может быть отброшено.

Если же все коэффициенты уравнения отличны от нуля, то в нуль должно обращаться хотя бы одно из неизвестных. В этом случае в правых частях всех уравнений, в которые это неизвестное входит, должны стоять нули (в противном случае система неразрешима). Если это условие выполнено, то все уравнения, содержащие данное неизвестное, могут быть без ущерба для анализа всей системы отброшены. В частности при этом будет отброшено и первое уравнение.

Итак, наличие нуля среди свободных членов уравнений приводит либо к быстрому установлению неразрешимости системы, либо к системе все свободные члены которой положительны.

2.3. Обратимся теперь к анализу системы (6).

Рассмотрим сначала случай, когда некоторое $B_i = 0$:

$$\max_j A_{ij} X_j = 0\,.$$

Это значит, что

$$A_{i1} X_1 = A_{i2} X_2 = \cdots = A_{in} X_n = 0\,,$$

т. е., каждое неизвестное, входящее в i-ое уравнение с ненулевым коэффициентом, должно обращаться в нуль. После отбрасывания всех таких неизвестных, мы получим систему, в которой всякое уравнение с нулевым свободным членом имеет все коэффициенты равными нулю. Последнее означает, что это уравнение является тождеством и может быть исключено из рассмотрения.

Таким образом, можно считать, что все числа B_i положительны.

Если во всех уравнениях такой системы при некотором неизвестном X_j стоят нулевые коэффициенты, то в любом ее решении значение X_j может быть выбрано совершенно произвольно. Исключая этот случай, будем считать, что для каждого j найдется такое i, что $A_{ij} > 0$. Очевидно,

$$X_j \leqq \min_{i:\, A_{ij} > 0} \frac{B_i}{A_{ij}}\,.$$

Пусть $A_{i'j}=0$. Заменим этот коэффициент системы на некоторое

$$0<A'_{i'j}<\frac{B_{i'}}{\min\limits_{i:A_{ij}>0}\frac{B_i}{A_{ij}}}\,.$$

Очевидно, тогда

$$A'_{i'j}\,X_j<B_{i'}\,,$$

и максимум в этом уравнении и в новой системе достигается на члене, отличном от $A'_{i'j}\,X_j$. Следовательно, новая система равносильна старой.

Действуя так столько раз, сколько нужно, мы придем к системе, все коэффициенты которой положительны.

2.4. Будем теперь считать, что в (3) все числа B_i положительны. В силу предыдущего отсюда следует положительность всех коэффициентов A_{ij}.

Положив

$$\frac{A_{ij}}{B_i}=\gamma_{ij}\,,\qquad i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,n\,, \tag{7}$$

мы можем переписать систему (3) в виде

$$\min_{1\leqq j\leqq n}\gamma_{ij}\,X_j=1\qquad i=1,\ldots,m\,. \tag{8}$$

Этот вид системы (3) будем называть *приведенным*, а матрицу

$$\begin{pmatrix}\gamma_{11}\cdots\gamma_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{m1}\cdots\gamma_{mn}\end{pmatrix} \tag{9}$$

— матрицей приведенных коэффициентов системы (3).

2.5. Обозначим через S_j $(j=1,\ldots,n)$ множество всех таких строк s матрицы (9), что

$$\gamma_{sj}=\min_{1\leqq i\leqq m}\gamma_{ij}\,. \tag{10}$$

Множество всех строк матрицы (9) обозначим через S.

Если множества $S_{j_1},\ldots,S_{j_k}$ составляют покрытие S, то такое покрытие будем называть *разрешающим*.

Будем говорить, что решение $X_1,\ldots,X_n$ и разрешающее покрытие $S_{j_1},\ldots,S_{j_k}$ множества S *соответствуют* друг другу, если

$$X_{j_l}=\frac{1}{\gamma_{s_l j_l}}\qquad (s_l\in S_l\,,\quad l=1,\ldots,k) \tag{11}$$

$$X_j\geqq\frac{1}{\gamma_{sj}}\qquad (s\in S_j\,,\quad j\neq j_1,\ldots,j_k). \tag{12}$$

Заметим сразу же, что для всех решений, соответствующих какому-либо покрытию,

$$X_j\geqq\max_{1\leqq i\leqq m}\frac{1}{\gamma_{ij}}\qquad (j=1,\ldots,n)\,. \tag{13}$$

Если множества $S_1, \ldots, S_n$ образуют покрытие S, и этому покрытию соответствует решение $X_1, \ldots, X_n$, то

$$X_j = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{\gamma_{ij}} = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{B_i}{A_{ij}} \qquad (j = 1, \ldots, n)\,. \tag{14}$$

2.6. Теорема. *Каждому решению системы* (3) *соответствует некоторое минимальное разрешающее покрытие множества S. Каждому разрешающему покрытию S соответствует некоторое решение системы* (3).

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — некоторое решение системы (3). Это означает, что

$$X_j \geqq \frac{1}{\gamma_{ij}} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)\,, \tag{15}$$

причем для каждого i должно найтись такое $j(i)$, что

$$X_{j(i)} = \frac{1}{\gamma_{ij(i)}}\,. \tag{16}$$

Обозначим через S_j' множество всех тех i, для которых $j(i) = j$. Так как каждое $i \in S$ принадлежит некоторому S_j', семейство множеств вида S_j' образует покрытие S. Выберем среди множеств S_j', те, которые составляют минимальное покрытие S и докажем, что это покрытие является разрешающим и соответствует решению $X_1, \ldots, X_n$.

Пусть построенное минимальное покрытие состоит из множеств $S_{j_1}', \ldots, S_{j_k}'$. Равенство (16) означает, что

$$X_{j_l} = \frac{1}{\gamma_{s_l j_l}} \qquad (s_l \in S_{j_l}'\,, \quad l = 1, \ldots, k)\,,$$

а из равенства (15) следует, что

$$X_j \geqq \frac{1}{\gamma_{sj}}\,,$$

и для всех s и j и в том числе при $s \in S_j\,(j \neq j_1, \ldots, j_k)$. Следовательно, построенное покрытие искомое.

Пусть теперь $S_{j_1}, \ldots, S_{j_k}$ — произвольное разрешающее покрытие множества S. Определим X_j $(j = 1, \ldots, n)$ в соответствии с формулами (11) и (12) и покажем, что эти числа составляют решение системы (3). Для этого достаточно убедиться в справедливости соотношений (15) и (16). Но (16), как уже отмечалось, равносильно (11). Принимая во внимание (12), нам остается установить (13) для тех случаев, когда $i \notin S_j$. Но в каждом таком случае мы можем найти некоторое $i' \in S_j$, и тогда

$$X_j \geqq \frac{1}{\gamma_{i'j}} = \max_{1 \leq i'' \leq m} \frac{1}{\gamma_{i''j}} \geqq \frac{1}{\gamma_{ij}}\,,$$

и требуемое доказано.

2.7. Доказанная теорема позволяет указать в явном виде все решения линейной экстремальной системы (3), или же обнаружить неразрешимость етой системы.

Анализ системы (3) с положительными коэффициентами можно свести к следующим этапам.

(а) Построить все множества $S_1, \ldots, S_n$. Если они не составляют покрытия множества всех строк матрицы приведенных коэффициентов, то система (3) не имеет решений. В противном случае решения существуют.

(б) Если система (3) разрешима, то существуют разрешающие покрытия. В частности, одним из таких покрытий должно быть семейство всех множеств $S_1, \ldots, S_n$. Соответствующее ей решение определяется формулами (14).

Ввиду соотношения (13) иные решения системы (3) могут быть получены из только что описанного решения лишь за счет увеличения тех или иных его компонент. Поэтому решение, определяемое формулами (14) естественно называть *минимальным*.

(в) Формулы (11) и (12) показывают, что в формуле (13) знак равенства должен обязательно выполняться для таких наборов $j_1, \ldots, j_k$, что $S_{j_1}, \ldots, S_{j_k}$ покрывают множество S. Для остальных значений индекса значения X_j могут увеличиваться совершенно произвольно.

3. Экстремальное векторное пространство

3.0. Здесь и далее эпитет ,,экстремальный" в применении к тому или иному объекту будет обычно употребляться в том смысле, что объект изучается с некоторой определенной точки зрения, именно, с точки зрения операции взятия экстремумов. Так мы будем говорить об экстремальных пространствах, экстремальных операциях и т.д. Обычное употребление прилагательного ,,экстремальный" в смысле достижения на данном объекте максимума или минимума также будет применяться. Это несколько вольное обращение с терминологией к недоразумениям приводить не должно, так как каждый раз будет достаточно ясно, о чем именно идет речь.

3.1. *n-вектором* будем, как обычно, называть упорядоченную систему из n вещественных чисел, называемых компонентами этого вектора. i-ую компоненту вектора X будем обычно обозначать через X_i.

3.1.1. Пусть X и Y — два n-вектора. Положим

$$(X \vee Y)_i = \max\{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

и

$$(X \wedge Y)_i = \min\{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Операцию $\wedge$ будем называть *минимизацией* векторов X и Y, а операцию $\vee$ — их *максимизацией*.

Если некоторое рассуждение справедливо для каждой из двух упомянутых операций, то мы будем проводить его, называя операцию *экстремизацией* и обозначая ее символом $\diamond$. Разумеется, этот знак (как и другие, аналогичные ему знаки, которые будут введены далее) каждый раз в пределах одного и того рассуждения будет употребляться в одном и том же смысле.

Поскольку вещественные числа также являются векторами (именно, 1-векторами) операции экстремизации применимы и к ним.

3.1.2. Как обычно, будем при любом вещественном λ под λX понимать вектор, для которого $(\lambda X)_i = \lambda X_i$. Эта операция умножения вектора на скаляр, будет нами применяться лишь в случае, когда и компоненты вектора X и скаляр λ неотрицательны.

Аналогично под $X + \lambda$ будет пониматься вектор, для которого $(X + \lambda)_i = X_i + \lambda$. Эта операция „сдвига вдоль биссектриссы положительного ортанта" будет применяться без каких либо ограничений положительности.

Пусть $\mathfrak{P}_n$ — n-мерное евклидово пространство, а $\mathfrak{M}_n$ — его положительный ортант (т.е. множество всех тех векторов, все компоненты которых неотрицательны).

Множество векторов $\mathfrak{P}_n$, рассматриваемое совместно с операциями $\vee$ и $\wedge$ и описанным оператором „сдвига" будет далее называться n-мерным *аддитивным экстремальным векторным пространством*.

Множество $\mathfrak{M}_n$, рассматриваемое совместно с операциями $\vee$ и $\wedge$ и оператором умножения на скаляр, назовем n-мерным *мультипликативным векторным экстремальным пространством*.

Поставим в соответствие каждому вектору $P \in \mathfrak{P}_n$ вектор

$$M(P) = (e^{P_1}, \ldots, e^{P_n}) \in \mathfrak{M}_n \qquad (e > 1) .$$

Очевидно, при этом

$$M(P^{(1)} \diamond P^{(2)}) = M(P^{(1)}) \diamond M(P^{(2)}) ,$$

и

$$M(\lambda + P) = M(\lambda)\, M(P) .$$

Это значит, что внутренность пространства $\mathfrak{M}_n$ и пространство $\mathfrak{P}_n$ (при замене умножения на скаляр соответствующим сдвигом) изоморфны относительно операций $\vee$ и $\wedge$. В связи с этим мы можем каждый раз ограничиваться рассмотрением лишь одного из двух экстремальных векторных пространств, руководствуясь соображениями удобства и наглядности.

Далее речь будет итти преимущественно и мультипликативных пространствах.

3.2. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств экстремизации:

1. *Идемпотентность*: $X \diamond X = X$.
2. *Коммутативность*: $X \diamond Y = Y \diamond X$.
3. *Ассоциативность*: $X \diamond (Y \diamond Z) = (X \diamond Y) \diamond Z$.

Коммутативность и ассоциативность операций экстремизации дают основание записывать без всяких скобок выражение

$$X^{(1)} \diamond X^{(2)} \diamond \cdots \diamond X^{(m)}$$

Мы будем это выражение обозначать также через

$$\mathop{\diamond}_{k=1}^{m} X^{(k)} .$$

Отметим дальнейшие свойства операций экстремизации.

4. При любом вещественном $\lambda \geqq 0$

$$\lambda (X \diamond Y) = \lambda X \diamond \lambda Y .$$

5. При любых вещественных неотрицательных λ_1, λ_2,

$$(\lambda_1 \diamond \lambda_2) X = \lambda_1 X \diamond \lambda_2 X .$$

3.2.1. Очевидно, соотношения

$$X \vee Y = X$$

и

$$X \wedge Y = Y$$

равносильны. Если они выполняются, то будем писать $X \geqq Y$, или, синонимично, $Y \leqq X$.

Как обычно, элемент $X \in \mathfrak{X}$ называется наибольшим (наименьшим) в $\mathfrak{X}$, если для всех $Y \in \mathfrak{X}$ имеет место $Y \leqq X$ (соответственно $Y \geqq X$).

Наибольший и наименьший элементы множества $\mathfrak{X}$ будем обозначать соответственно через $\bigvee \mathfrak{X}$ и $\bigwedge \mathfrak{X}$.

3.2.2. Если $X^{(ij)}$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l)$ — произвольные n-векторы, то

$$\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l} X^{(ij)} \leqq \bigwedge_{j=1}^{l} \bigvee_{i=1}^{k} X^{(ij)} .$$

В самом деле, рассматривая r-ую компоненту левой части написанного неравенства, мы имеем

$$\left(\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l} X^{(ij)}\right)_r = \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l} X_r^{(ij)} = \max_{1 \leqq i \leqq k} \min_{1 \leqq j \leqq l} X_r^{(ij)} ,$$

и на основании известного неравенства

$$\max_{1 \leqq i \leqq k} \min_{1 \leqq j \leqq l} X_r^{(ij)} \leqq \min_{1 \leqq j \leqq l} \max_{1 \leqq i \leqq k} X_r^{(ij)} = \left(\bigwedge_{j=1}^{l} \bigvee_{i=1}^{k} X^{(ij)}\right)_r .$$

3.2.3. Положим для $X, Y \in \mathfrak{P}_n$

$$\varrho(X, Y) = \bigvee_{i=1}^{n} |X_i - Y_i| = \max_{1 \leqq i \leqq n} |X_i - Y_i| .$$

Функция ϱ является типичной метрикой в пространствах последовательностей. В данном случае она превращает $\mathfrak{P}_n$ в топологическое пространство.

Далее сходимость последовательностей, ограниченность, замкнутость и т. д. множеств будет пониматься именно в смысле топологии, порожденной метрикой ϱ. Впрочем, эта топология совпадает с топологией евклидова пространства векторов, из которых состоит $\mathfrak{P}_n$.

3.3. Будем говорить, что n-вектор X *экстремально зависит* от n-векторов

$$X^{(1)}, \ldots, X^{(m)} , \tag{17}$$

если существуют такие неотрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что

$$X = \diamond_{i=1}^{m} \lambda_i X^{(i)} . \tag{18}$$

Мы будем говорить также в этом случае, что X является *линейной экстремальной комбинацией* (или просто *экстремальной комбинацией*) векторов (17).

Употребляя введенную терминологию, мы можем переписать систему экстремальных уравнений (3) в виде

$$\bigwedge_{j=1}^{n} A_{\cdot j} X_j = B ,$$

где $A_{\cdot j}$ есть j-ый столбец матрицы коэффициентов системы (3), а B — вектор правых частей входящих в эту систему уравнений.

Условие разрешимости системы (3) состоит, следовательно, в том, что вектор B должен быть минимально зависим от векторов $A_{\cdot j}$.

3.3.1. Из установленной связи между экстремальной зависимостью векторов с одной стороны и разрешимостью экстремальных уравнений с другой, без труда можно вывести следующие свойства экстремальной зависимости, аналогичные известным свойствам линейной зависимости.

Рассматривая экстремальную зависимость какого-либо вектора от системы векторов, мы можем считать, что в этой последней системе повторяющихся векторов нет.

Если n-вектор X экстремально зависит от n-векторов $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$, а каждый из векторов $X^{(i)}$ зависит в свою очередь экстремально от векторов $X^{(i1)}, \ldots, X^{(ik_i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$, то X зависит экстремально то векторов $X^{(11)}, \ldots, X^{(mk_m)}$.

Сформулированные свойства экстремальной зависимости можно, впрочем, доказать и непосредственно, без обращения к экстремальным уравнениям.

3.4. Подмножество $\mathfrak{S}$ экстремального пространства будем называть *максимально выпуклым*, если для любых $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{S}$ и произвольных $0 \leqq \lambda_1, \lambda_2$, для которых $\lambda_1 \vee \lambda_2 = 1$,

$$\lambda_1 X^{(1)} \vee \lambda_2 X^{(2)} \in \mathfrak{S}.$$

Множество $\mathfrak{S}$ называется *минимальным выпуклым*, если в тех же условиях при $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$ и $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = 1$ имеет место

$$\lambda_1 X^{(1)} \wedge \lambda_2 X^{(2)} \in \mathfrak{S} .$$

3.4.1. Максимальное выпуклое подмножество $\mathfrak{S}$ экстремального пространства называется *максимально выпуклым конусом*, если для любых $X \in \mathfrak{S}$ и $\lambda > 0$ имеет место $\lambda X \in \mathfrak{S}$. Аналогично определяется *минимальный выпуклый конус*.

Примерами выпуклых конусов в экстремальном пространстве $\mathfrak{M}_n$, которые одновременно являются и максимальными и минимальными, могут служить все выходящие из начала координат лучи, а также все пространство $\mathfrak{M}_n$.

Если $\mathfrak{S}$ — максимальный выпуклый конус, а $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$ — такие векторы, что любой вектор из $\mathfrak{S}$ может быть представлен в виде их максимальной выпуклой комбинации, то будем говорить, что конус $\mathfrak{S}$ натянут на векторы $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$.

3.5. Заметим, что наряду с векторными экстремальными пространствами можно рассматривать и абстрактные экстремальные пространства, которые можно определить как полуструктуры (см. напр., Биркгоф [2]) относительно операции $\diamond$ с умножением на вещественные неотрицательные скаляры, которое удовлетворяет аксиомам 4 и 5.

Абстрактные экстремальные пространства представляют интерес и с чисто алгебраической точки зрения. Мы не будем здесь на этом вопросе останавливаться.

4. Экстремальная алгебра матриц

4.1. Как обычно, будем называть $(m \times n)$-матрицей такую матрицу, в которой m строк и n столбцов.

Далее мы будем рассматривать только матрицы с положительными элементами. В экстремальной алгебре такие матрицы играют роль невырожденных. Полную теорию, охватывающую все матрицы с неотрицательными элементами, автор предполагает изложить в дальнейших публикациях.

Если A — некоторая матрица, то i-ую ее строку будем обозначать через $A_{i\cdot}$, j-ый столбец — через $A_{\cdot j}$, а стоящий на их пересечении элемент — через A_{ij}.

4.2. Распространим на матрицы одинаковой формы операции экстремизации векторов, положив для любых двух $(m \times n)$-матриц A и B

$$(A \diamond B)_{ij} = A_{ij} \diamond B_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n) .$$

Очевидно, в операциях экстремизации ,,двумерность`` строения матрицы никак не проявляются. Поэтому по отношению к этим операциям матрицы ведут себя так же, как векторы. В частности, в применении к матрицам можно повторить mutatis mutandis все рассуждения раздела 3.

4.3. Аналогом скалярного произведения в экстремальных векторных пространствах являются экстремальные произведения векторов, определяемые следующим образом.

Пусть $X, Y \in \mathfrak{M}_n$. Положим

$$X \mathbin{\overline{\circ}} Y = \bigvee_{i=1}^{n} X_i Y_i ,$$

$$X \mathbin{\underline{\circ}} Y = \bigwedge_{i=1}^{n} X_i Y_i .$$

Операции $\overline{\circ}$ и $\underline{\circ}$ будем соответственно называть *максимальным* и *минимальным* произведениями векторов.

Если речь идет о векторах X и Y из $\mathfrak{P}_n$, то можно рассматривать числа

$$X \mathbin{\overline{\circ +}} Y = \bigvee_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) ,$$

$$X \mathbin{\underline{\circ +}} Y = \bigwedge_{i=1}^{n} (X_i + Y_i)$$

и называть их соответственно максимальной и минимальной суммами векторов X и Y.

Говоря одновременно об обоих этих произведениях (суммах) векторов, мы будем употреблять термин *экстремальное* произведение (сумма). Дальнейшие формулировки и рассуждения, в которых говорится об экстремальных произведениях будут иметь силу как для минимального, так и для максимального произведений.

Как правило рассуждения будут для определенности проводиться для случая максимального произведения. Экстремальное произведение векторов X и Y будет обозначаться как $X \underline{\overline{\circ}} Y$.

4.3.1. Пусть A и B — соответственно произвольные $(m\times p)$- и $(p\times n)$-матрицы. Под экстремальным произведением A и B будем понимать такую $(m\times n)$-матрицу $A \underline{\overline{\circ}} B$, что

$$(A \underline{\overline{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \underline{\overline{\circ}} B_{\cdot j} = \mathop{\Diamond}_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}\,.$$

Аналогично определяются экстремальные суммы матриц.

4.3.2. Нетрудно проверить, что экстремальное произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно, но ассоциативно:

$$A \underline{\overline{\circ}} (B \underline{\overline{\circ}} C) = (A \underline{\overline{\circ}} B) \underline{\overline{\circ}} C\,.$$

Ассоциативность экстремального умножения матриц была доказана в работе Моисила [8], в которой, по-видимому, впервые в литературе была описана эта операция.

Для экстремального произведения n матриц $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ будем пользоваться обозначением

$$\mathop{\underline{\overline{\bigcirc}}}_{i=1}^{n} A^{(i)}\,.$$

Заметим, наконец, что из $A \underline{\overline{\circ}} B = C$ следует $B^T \underline{\overline{\circ}} A^T = C^T$, где ^{T} — знак транспонирования матрицы.

4.4. Приведем несколько фактов, касающихся связи между введенными экстремальными операциями над матрицами.

Законы, связывающие обе операции экстремального умножения матриц носят несимметричный и довольно запутанный характер. Мы не будем здесь на них подробно останавливаться, а отметим только один факт, указывающий на возможные непосредственные связи экстремального умножения матриц с теорией игр.

Докажем, что

$$A \underline{\circ} (B \overline{\circ} C) \geqq (A \underline{\circ} B) \overline{\circ} C\,,$$
$$A \overline{\circ} (B \underline{\circ} C) \leqq (A \overline{\circ} B) \underline{\circ} C\,.$$

(Здесь знаки $\geqq$ и $\leqq$ означают, как обычно, по-элементные неравенства матриц, причем точное равенство также допускается).

Для произвольных i и j мы имеем

$$\big(A \underline{\circ} (B \overline{\circ} C)\big)_{ij} = \bigwedge_k A_{ik} (B \overline{\circ} C)_{kj}$$
$$= \bigwedge_k A_{ik} \bigvee_l B_{kl} C_{lj} = \bigwedge_k \bigvee_l A_{ik} B_{kl} C_{lj}\,.$$

На основании неравенства минимакса мы получаем

$$\begin{aligned}(A \,\underline{\circ}\, (B \,\overline{\circ}\, C))_{ij} &\geqq \bigvee_l \bigwedge_k A_{ik} B_{kl} C_{lj} = \bigvee_l \Big(\bigwedge_k A_{ik} B_{kl}\Big) C_{lj} \\ &= \bigvee_l (A \,\underline{\circ}\, B)_{il} C_{lj} = \big((A \,\underline{\circ}\, B) \,\overline{\circ}\, C\big)_{ij} .\end{aligned}$$

Первое из наших неравенств доказано. Второе неравенство доказывается. аналогично.

4.4.2. *Дистрибутивность* (см. [9]). Если A $(m \times p)$-матрица, а $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ — $(p \times n)$-матрицы, то

$$A \,\overline{\underline{\circ}}\, (B^{(1)} \diamond B^{(2)}) = (A \,\overline{\underline{\circ}}\, B^{(1)}) \diamond (A \,\overline{\underline{\circ}}\, B^{(2)}) .$$

Для доказательства достатотно замечить, что

$$\begin{aligned}\big(A \,\overline{\underline{\circ}}\, (B^{(1)} \diamond B^{(2)})\big)_{ij} &= \mathop{\Diamond}_k A_{ik} (B^{(1)} \diamond B^{(2)})_{kj} = \mathop{\Diamond}_k A_{ik} (B^{(1)}_{kj} \diamond B^{(2)}_{kj}) \\ &= \mathop{\Diamond}_k (A_{ik} B^{(1)}_{kj} \diamond A_{ik} B^{(2)}_{kj}) \\ &= \mathop{\Diamond}_k A_{ik} B^{(1)}_{kj} \diamond \mathop{\Diamond}_k A_{ik} B^{(2)}_{kj} \\ &= (A \,\overline{\underline{\circ}}\, B^{(1)})_{ij} \diamond (A \,\overline{\underline{\circ}}\, B^{(2)})_{ij} \\ &= \big((A \,\overline{\underline{\circ}}\, B^{(1)}) \diamond (A \,\overline{\underline{\circ}}\, B^{(2)})\big)_{ij}\end{aligned}$$

4.4.3. *Минимаксы*. Если A — $(m \times p)$-матрица, а $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ $(p \times n)$-матрицы, то

$$\begin{aligned}&A \,\overline{\circ}\, (B^{(1)} \wedge B^{(2)}) \leqq (A \,\overline{\circ}\, B^{(1)}) \wedge (A \,\overline{\circ}\, B^{(2)}) , \\ &A \,\underline{\circ}\, (B^{(1)} \vee B^{(2)}) \geqq (A \,\underline{\circ}\, B^{(1)}) \vee (A \,\underline{\circ}\, B^{(2)}) .\end{aligned}$$

Первое неравенство получается в результате следующих рассуждений:

$$\begin{aligned}\big(A \,\overline{\circ}\, (B^{(1)} \wedge B^{(2)})\big)_{ij} &= \bigvee_k A_{ik} (B^{(1)} \wedge B^{(2)})_{kj} \\ &= \bigvee_k (A_{ik} B^{(1)}_{kj} \wedge A_{ik} B^{(2)}_{kj}) \leqq \bigvee_k A_{ik} B^{(1)}_{kj} \wedge \bigvee_k A_{ik} B^{(2)}_{kj} \\ &= (A \,\overline{\circ}\, B^{(1)})_{ij} \wedge (A \,\overline{\circ}\, B^{(2)})_{ij} = \big((A \,\overline{\circ}\, B^{(1)}) \wedge (A \,\overline{\circ}\, B^{(2)})\big)_{ij} .\end{aligned}$$

Второе неравенство устанавливается аналогично.

4.5. Экстремальные системы уравнений удобно формулировать в терминах экстремальных произведений матриц. Так, полагая

$$||A_{ij}||_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = A , \quad (B_1, \dots, B_m) = B , \quad (X_1, \dots, X_n) = X ,$$

мы можем переписать систему (1) как

$$A \,\underline{\circ}\, X = B ,$$

а систему (3) как

$$A \,\overline{\circ}\, X = B .$$

4.5.1. Теорема. *Множество решений уравнения $A \,\overline{\circ}\, X = B$ является максимально выпуклым.*

Доказательство. Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}$ — два решения этого уравнения, и $0 \leqq \lambda_1, \lambda_2 \leqq 1$, $\lambda_1 \vee \lambda_2 = 1$. Тогда

$$A \mathbin{\bar{\circ}} (\lambda_1 X^{(1)} \vee \lambda_2 X^{(2)}) = \lambda_1 (A \mathbin{\bar{\circ}} X^{(1)}) \vee \lambda_2 (A \mathbin{\bar{\circ}} X^{(2)})$$
$$= \lambda_1 B \vee \lambda_2 B = (\lambda_1 \vee \lambda_2) B = B .$$

Аналогично доказывается, что множество решений уравнения $A \mathbin{\underline{\circ}} X = B$ является минимально выпуклым.

4.6. Матрицей, *экстремально обратной* к $(m \times n)$-матрице A называется $(n \times m)$-матрица A^-, для которой

$$(A^-)_{ij} = \frac{1}{A_{ji}} .$$

Из этого определения следует, что для обратимости матрицы необходимо и достаточно, чтобы все ее элементы были положительны.

По определению экстремально обратной матрицы

$$(A^T)^- = (A^-)^T .$$

4.6.1. Сформулированное определение экстремально обратной матрицы оправдывается следующим предложением.

Теорема. *1. Если*

$$A \mathbin{\underline{\circ}} B = C , \tag{19}$$

то

$$B \geqq A^- \mathbin{\bar{\circ}} C , \tag{20}$$

$$A \geqq C \mathbin{\bar{\circ}} B^- . \tag{21}$$

2. Если

$$A \mathbin{\bar{\circ}} B = C$$

то

$$B \leqq A^- \mathbin{\underline{\circ}} C ,$$

$$A \leqq C \mathbin{\underline{\circ}} B^- .$$

Доказательство. Из (19) следует, что при любом j

$$A \mathbin{\underline{\circ}} B_{\cdot j} = C_{\cdot j} . \tag{22}$$

Эта экстремальная система уравнений при любом j разрешима относительно $B_{\cdot j}$. На основании формулы (14) (и определений минимального произведения и обратной матрицы) минимальным решением системы (22) является $A^- \mathbin{\bar{\circ}} C_{\cdot j}$. Поскольку это решение минимальное, а $B_{\cdot j}$ — одно из решений, должно быть

$$B_{\cdot j} \geqq A^- \mathbin{\bar{\circ}} C_{\cdot j} .$$

Так как это справедливо при любом j, мы получаем (20). Далее, равенство (19) можно переписать как

$$B^T \mathbin{\underline{\circ}} A^T = C^T ,$$

откуда по уже доказанному следует, что

$$A^T \geqq (B^T)^- \mathbin{\bar{\circ}} C^T ,$$

или

$$A^T \geqq (B^-)^T \mathbin{\bar{\circ}} C^T ,$$

или, наконец,

$$A \geqq C \mathbin{\bar{\circ}} B^- .$$

Вторая часть теоремы доказывается симметричными рассуждениями.

4.6.2. Отметим еще несколько свойств экстремального обращения матриц.

4.6.2.1. $(A \mathbin{\underline{\circ}} B)^- = B^- \mathbin{\bar{\circ}} A^-$.

Действительно, рассматривая стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца матрицы $(A \mathbin{\underline{\circ}} B)^-$ элемент, мы имеем:

$$((A \mathbin{\underline{\circ}} B)^-)_{ij} = \frac{1}{(A \mathbin{\underline{\circ}} B)_{ji}} = \frac{1}{\bigwedge\limits_k A_{jk} B_{ki}} = \bigvee_k \frac{1}{A_{jk}} \frac{1}{B_{ki}}$$

$$= \bigvee_k \frac{1}{B_{ki}} \frac{1}{A_{jk}} = \bigvee_k (B^-)_{ik} (A^-)_{kj} = (B^- \mathbin{\bar{\circ}} A^-)_{ij} .$$

4.6.2.2. $(A \mathbin{\bar{\circ}} B)^- = B^- \mathbin{\underline{\circ}} A^-$.

Доказывается аналогично предыдущему.

4.6.2.3. $A^{--} = A$. В самом деле,

$$(A^{--})_{ij} = \frac{1}{(A^-)_{ij}} = A_{ij} .$$

4.6.2.4. $(\lambda A)^- = \frac{1}{\lambda} A^-$.

4.7. Как и в обычном, „линейном" случае, каждую $(m \times n)$-матрицу A естественно рассматривать как преобразование пространства $\mathfrak{M}_n$ в $\mathfrak{M}_m$, переводящее каждый вектор $X \in \mathfrak{M}_n$ в вектор $A \mathbin{\bar{\circ}} X$ или соответственно в вектор $A \mathbin{\underline{\circ}} X \in \mathfrak{M}_m$.

Если $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}_n$, то под $A \mathbin{\bar{\circ}} \mathfrak{R}$ будем, как обычно, понимать совокупность всех тех векторов $S \in \mathfrak{M}_m$, для которых при некотором $R \in \mathfrak{R}$ имеет место $A \mathbin{\bar{\circ}} R = S$.

4.7.1. Теорема. *Если множество $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}_n$ является экстремально выпуклым, то множество $A \mathbin{\bar{\circ}} \mathfrak{R}$ также является экстремально выпуклым.*

Доказательство. Возьмем произвольно $S^{(1)}, S^{(2)} \in A \mathbin{\bar{\circ}} \mathfrak{R}$, и $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0, \lambda_1 \diamond \lambda_2 = 1$. Тогда найдутся такие $R^{(1)}, R^{(2)} \in \mathfrak{R}$, что

$$S^{(1)} = A \mathbin{\bar{\circ}} R^{(1)} , \qquad S^{(2)} = A \mathbin{\bar{\circ}} R^{(2)} ,$$

и мы будем на основании дистрибутивности иметь

$$\begin{aligned} \lambda_1 S^{(1)} \diamond \lambda_2 S^{(2)} &= \lambda_1 (A \mathbin{\bar{\circ}} R^{(1)}) \diamond \lambda_2 (A \mathbin{\bar{\circ}} R^{(2)}) \\ &= (A \mathbin{\bar{\circ}} \lambda_1 R^{(1)}) \diamond (A \mathbin{\bar{\circ}} \lambda_2 R^{(2)}) \\ &= A \mathbin{\bar{\circ}} (\lambda_1 R^{(1)} \diamond \lambda_2 R^{(2)}) . \end{aligned}$$

Но ввиду выпуклости $\mathfrak{R}$

$$\lambda_1 R^{(1)} \diamond \lambda_2 R^{(2)} \in \mathfrak{R}$$

и поэтому

$$\lambda_1 S^{(1)} \diamond \lambda_2 S^{(2)} \in A \,\underline{\circ}\, \mathfrak{R}\,.$$

4.7.2. *Если множество $\mathfrak{R} \in \mathfrak{M}_n$, является экстремальным выпуклым конусом, то множество $A \,\bar{\circ}\, \mathfrak{R} \in \mathfrak{M}_m$ также есть экстремальный выпуклый конус.*

Для доказательства заметим, что если $S = A \,\underline{\circ}\, R$ и $\lambda \geqq 0$, то

$$\lambda S = \lambda (A \,\underline{\circ}\, R) = A \,\underline{\circ}\, \lambda R \in A \,\underline{\circ}\, \mathfrak{R}\,.$$

4.7.2.1. В частности, экстремальным выпуклым конусом является множество $A \,\underline{\circ}\, \mathfrak{M}_n$.

4.7.2.2. Теорема. *Экстремальный выпуклый конус $A \,\bar{\circ}\, \mathfrak{M}_n$ является экстремальным выпуклым конусом, натянутым на векторы — столбцы матрицы A.*

Для доказательства достаточно заметить, что равенство $X = A \,\underline{\circ}\, Y$ означает

$$X_i = \mathop{\diamond}_{j} A_{ij}\, Y_j \quad (i = 1, \ldots, m)\,,$$

т. е.

$$X = \mathop{\diamond}_{j} A_{\cdot j}\, Y_j\,,$$

а в силу п. 3.4.1, это и требовалось.

4.8. В терминах экстремальных сумм матрицы удобно формулируется и решается задача п. 1.4.

В своей первоначальной формулировке эта задача состояла в выборе номеров состояний $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ системы, соответственно в моменты времени $1, 2, \ldots, m-1$, которые минимизировали бы сумму

$$a^{(1)}_{i_0 i_1} + a^{(2)}_{i_1 i_2} + \cdots + a^{(m)}_{i_{m-1}\, i_m}\,.$$

Рассматривая матрицы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$, мы можем истолковать нашу задачу как вычисление

$$\left(\mathop{\bigcirc\!\!+}_{k=0}^{m-1} a^{(k+1)}\right)_{i_0 i_m}\,. \tag{23}$$

4.8.1. Если процесс, сводящийся к задаче п. 1.7 однороден, и все матрицы $a^{(k)}$ одинаковы:

$$a^{(1)} = a^{(2)} = \cdots = a^{(m)} = a\,,$$

то выражение (23) может быть переписано в виде

$$(a^{\bigcirc\!\!+\, m})_{i_0 i_m}\,.$$

Если m достаточно велико (по сравнению с n), то интуитивно ясно, что выбор последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ должен состоять из следующих этапов.

Во-первых, нам нужно найти такой цикл $j_1, \ldots, j_k$ состояний системы, обходя который мы будем иметь (в пересчете на один шаг) минимальные затраты.

Во-вторых, следует найти оптимальный ,,выход" из состояния i_0 на цикл и оптимальный ,,сход" с цикла в состояние i_m.

В-третьих, провести сравнение полученных результатов по всем циклам. Первая из поставленных задач сводится к тому, чтобы найти такую циклическую последовательность состояний $j_1, \ldots, j_k$ чтобы минимизировать

$$\frac{1}{k} \sum_{=1}^{k} a_{j_l j_{l+1}}, \tag{24}$$

где под j_{k+1} понимается j_1.

Так как минимальная величина суммарных затрат может быть важной даже и без указания на путь ее получения, нахождение минимума выражения (24) имеет самостоятельний интерес.

Этот круг вопросов будет рассмотрен в разделе 5.

5. Экстремальные собственные числа и собственные векторы

5.1. Пусть A — квадратная $(n \times n)$-матрица, а число λ и ненулевой вектор X таковы, что

$$A \overline{\underline{\circ}} X = \lambda X . \tag{25}$$

В этом случае λ называется *экстремальным собственным числом* матрицы A, а X — ее *экстремальным собственным вектором*. Максимальное собственное число A будет обозначаться через $\overline{\lambda}(A)$ или, когда это не будет вызывать недоразумений, просто через $\overline{\lambda}$, а минимальное ее собственное числu — соответственно через $\underline{\lambda}(A)$ или $\underline{\lambda}$.

Множество всех экстремальных собственных векторов обозначим через $\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$ или, короче, через $\overline{\underline{\mathfrak{X}}}$.

5.1.1. Теорема. *При любом* $\alpha > 0$

$$\overline{\underline{\lambda}}(\alpha A) = \alpha \overline{\underline{\lambda}}(A) ,$$

$$\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(\alpha A) = \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A) .$$

Доказательство. Пусть $X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$. Тогда

$$(\alpha A) \overline{\underline{\circ}} X = \alpha (A \overline{\underline{\circ}} X) = \alpha(\overline{\underline{\lambda}} X) = (\alpha \overline{\underline{\lambda}}) X ,$$

и требуемое доказано.

5.1.2. Лемма. *Если*

$$\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A) \cap \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(B) \neq \Lambda ,$$

то

$$\overline{\underline{\lambda}} (A \overline{\underline{\circ}} B) = \overline{\underline{\lambda}}(A) \overline{\underline{\lambda}}(B) .$$

Доказательство. Возьмем произвольно

$$X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A) \cap \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(B) .$$

Тогда

$$(A \underline{\circ} B) \underline{\circ} X = A \underline{\circ} (B \underline{\circ} X) = A \underline{\circ} (\underline{\lambda}(B)\, X) = \underline{\lambda}(A)\, \underline{\lambda}(B)\, X\,,$$

а это и требовалось.

5.2. Пусть $X \in \underline{\mathfrak{X}}(A)$. Построим граф[1]) $\underline{\Gamma}_{A,X}$, вершинами которого являются номера строк (или столбцов) матрицы A т. е. числа $1, 2, \ldots, n$, положив $j \in \underline{\Gamma}_{A,X}\, i$ тогда и только тогда, когда $A_{ij}\, X_j = \underline{\lambda}\, X_i$. Граф $\underline{\Gamma}_{A,X}$ назовем *экстремальным графом матрицы* A, соответствующим ее экстремальному собственному вектору X.

Строки (столбцы) матрицы A, а также компоненты n-векторов, номера которых входят в какой-либо контур $\underline{\Gamma}_{A,X}$, называются контурными строками (соответственно, столбцами или компонентами).

Частичный подграф графа $\underline{\Gamma}_{A,X}$, состоящий из всех его контуров, назовем *X-контурным графом A*. Обозначение: $\underline{\Gamma}^*_{A,X}$.

5.3. Лемма. *Для любой матрицы A и произвольного ее собственного экстремального вектора X граф $\underline{\Gamma}^*_{A,X}$ непуст.*

Доказательство. Пусть $A \underline{\circ} X = \underline{\lambda}\, X$. Тогда для любого i найдется такое j, что $A_{ij}\, X_j = \underline{\lambda}\, X_i$. Начиная с произвольного i_1, будем строить последовательность $i_1, i_2, \ldots$, полагая для каждого l

$$A_{i_l i_{l+1}}\, X_{i_{l+1}} = \underline{\lambda}\, X_{i_l}\,.$$

Ввиду конечности размеров A в построенной последовательности должны появиться повторения. Пусть $i_r = i_{r+k}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ первое из этих повторений. Тогда контур $(i_r, \ldots, i_{r+k})$ принадлежит графу $\underline{\Gamma}^*_{A,X}$.

5.4. Теорема. *Каждая матрица A обладает собственными экстремальными векторами. Эти векторы не имеют нулевых компонент.*

Доказательство. Ввиду того, что

$$A \underline{\circ} \alpha X = \alpha (A \underline{\circ} X)\,,$$

каждая матрица отображает в себя множество лучей, лежащих в положительном ортанте $\mathfrak{M}_n$ и выходящих из начала координат. Очевидно это множество гомеоморфно $(n-1)$-мерному симплексу, а отображение непрерывно. Поэтому на основании теоремы Брауэра о неподвижной точке, хотя бы один из лучей переводится в себя. Следовательно, экстремальные собственные векторы существуют. Положительность их компонент следует из положительности элементов матрицы A.

---

[1]) Связанные с графами термины и обозначения соответствуют употребляемым в книге К. Бержа [12].

В самом деле, если речь идет о максимальных собственных векторах, то обращение в нуль одной из компонент вектора (пусть, например, будет $X_i = 0$) означает, что

$$A_{i\cdot} \bar{\circ}\, X = \bigvee_j A_{ij} X_j = 0\,,$$

и потому

$$A_{ij} X_j = 0 \quad \text{для всех } j = 1, \ldots, n\,.$$

Поскольку все $A_{ij} > 0$, отсюда следует, что все $X_j = 0$, что невозможно, ибо вектор X предполагается ненулевым.

С другой стороны, если мы имеем дело с минимальными собстьенными векторами X, то из $X_k = 0$ следует, что при любом i

$$X_i = A_{i\cdot} \bar{\circ}\, X = \bigwedge_j A_{ij} X_j \leqq A_{ik} X_k = 0\,,$$

чего при ненулевом векторе X быть не может.

5.5. Теорема. *Каждая $(n \times n)$-матрица A имеет единственное экстремальное собственное число:*

$$\underline{\bar{\lambda}}(A) = \mathop{\Diamond}_{1 \leqq i, k \leqq n} \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{ii}}\,. \tag{26}$$

Доказательство. Будем для определенности рассматривать случай максимального собственного числа. Пусть $X \in \bar{\mathfrak{X}}(A)$. Возьмем произвольную циклическую последовательность

$$i = i_1, i_2, \ldots, i_{k+1} = i\,. \tag{27}$$

Мы имеем

$$A_{i_l i_{l+1}} X_{i_{l+1}} \leqq \bar{\lambda} X_{i_l} \qquad (l = 1, \ldots, k) \tag{28}$$

или, перемножая все эти неравенства почленно и сокращая на произведение $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$, получаем

$$\prod_{l=1}^{k} A_{i_l i_{l+1}} \leqq \bar{\lambda}^k\,.$$

Это означает, что при любых i и k

$$\bar{\lambda} \geqq \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{ii}}\,,$$

т. е.

$$\bar{\lambda} \geqq \bigvee_{1 \leqq i, k \leqq n} \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{ii}}\,. \tag{29}$$

Пусть теперь последовательность (27) является контуром какого-либо из графов $\overline{\Gamma^*_{\lambda, X}}$ (ввиду леммы п. 5.3 такие контуры существуют). В этом случае

$$A_{i_l i_{l+1}} X_{i_{l+1}} = \bar{\lambda} X_{i_l}\,, \qquad (l = 1, \ldots, k)\,.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, мы отсюда получаем

$$\bar{\lambda} = \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{ii}} \leqq \bigvee_{1 \leqq i, k \leqq n} \sqrt[k]{(A^{\bar{\circ} k})_{ii}}\,. \tag{30}$$

Сопоставление (29) и (30) дает нам требуемое.

5.5.1. Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\lambda}(A) = \sqrt[4]{A_{13}\, A_{32}\, A_{24}\, A_{41}} = \sqrt[4]{750}\,,$$

$$\underline{\lambda}(A) = \sqrt{A_{12}\, A_{21}} = \sqrt{2}\,.$$

5.5.2. Следствие. $\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$ *является экстремальным-выпуклым конусом.*

В самом деле, если $X^{(1)}, X^{(2)} \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$, то

$$A \,\overline{\underline{\circ}}\, X^{(1)} = \overline{\underline{\lambda}}\, X^{(1)}\,,$$

$$A \,\overline{\underline{\circ}}\, X^{(2)} = \overline{\underline{\lambda}}\, X^{(2)}\,.$$

Следовательно, при любых $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$ на основании п. 4.4.2

$$\begin{aligned} A \,\overline{\underline{\circ}}\, (\lambda_1\, X^{(1)} \diamond \lambda_2\, X^{(2)}) &= (A \,\overline{\underline{\circ}}\, \lambda_1\, X^{(1)}) \diamond (A \,\overline{\underline{\circ}}\, \lambda_2\, X^{(2)}) \\ &= \overline{\underline{\lambda}}\, \lambda_1\, X^{(1)} \diamond \overline{\underline{\lambda}}\, \lambda_2\, X^{(2)} = \overline{\underline{\lambda}}(\lambda_1\, X^{(1)} \diamond \lambda_2\, X^{(2)})\,. \end{aligned}$$

5.5.3. Следствие. *Пусть* $X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$. *Для того, чтобы последовательность* $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} = i_1$ *составляла контур в графе* $\overline{\underline{\Gamma}}^*_{A,X}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\prod_{l=1}^{k} A_{i_l i_{l+1}} = \overline{\underline{\lambda}}^k(A)\,. \tag{31}$$

Необходимость была установлена в ходе доказательства теоремы. Для доказательства достаточности предположим, что в условиях (31) при некотором l_0, взятом из числа $1, 2, \ldots, k$,

$$A_{i_{l_0} i_{l_0+1}}\, X_{i_{l_0+1}} \neq \overline{\underline{\lambda}}\, X_{i_{l_0}}\,,$$

или, говоря для определенности с максимальных собственных векторах,

$$A_{i_{l_0} i_{l_0+1}}\, X_{i_{l_0+1}} < \overline{\lambda}\, X_{i_{l_0}}\,. \tag{32}$$

Но так как *при всех* $l = 1, \ldots, k$ имеет место (28), неравенство (32) противоречит (31).

5.5.4. Следствие. *Если* $X^{(1)}, X^{(2)} \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$, *то*

$$\overline{\underline{\Gamma}}^*_{A, X^{(1)}} = \overline{\underline{\Gamma}}^*_{A, X^{(2)}}\,.$$

Вытекает немедленно из предыдущего.

5.5.5. На основании последнего утверждения мы можем говорить не об X-контурном графе A, а просто о *контурном* графе этой матрицы и обозначать его через $\overline{\underline{\Gamma}}^*_A$.

Если граф $\overline{\underline{\Gamma}}^*_A$ состоит только из петель, то матрицу A будем называть экстремально *петлевой*.

Очевидно, для экстремально петлевой матрицы A все контуры графов $\overline{\underline{\Gamma}}_{A,X}$ являются петлями.

5.6. Теорема. *Если* $X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A) \cap \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(B)$, *то*

$$\overline{\underline{\Gamma}}_{A \overline{\underline{\circ}} B, X} = \overline{\underline{\Gamma}}_{A,X}\, \overline{\underline{\Gamma}}_{B,X}$$

(здесь произведение графов понимается как композиция отношений).

Доказательство. Будем иметь дело с максимальными собственными векторами.

Для доказательства отметим следующее: $j \in \overline{\underline{\Gamma}}_{A \overline{\circ} B, X}\, i$ означает, что

$$\bigvee_k A_{ik}\, B_{kj}\, X_j = \overline{\lambda}(A)\, \overline{\lambda}(B)\, X_i\,.$$

Но при всех k

$$B_{kj}\, X_j \leqq \overline{\underline{\lambda}}(B)\, X_k\,, \tag{33}$$

и

$$A_{ik}\, X_k \leqq \overline{\underline{\lambda}}(A)\, X_i\,. \tag{34}$$

Следовательно, из (33) и (34) вытекает,

$$A_{ik}\, B_{kj}\, X_j \leqq \overline{\underline{\lambda}}(A)\, \overline{\underline{\lambda}}(B)\, X_i\,. \tag{35}$$

Значит, если при некотором k здесь достигается равенство, то оно должно при этом же k достигаться и в соотношениях (33) и (34). Последнее же означает, что

$$j \in \overline{\underline{\Gamma}}_{A,X}\, k\,, \qquad k \in \overline{\underline{\Gamma}}_{B,X}\, i\,. \tag{36}$$

Наоборот, если выполняется (36), то в (33) и (34) имеет место равенство; равенство же будет в этом случае и в (35), т. е.

$$j \in \overline{\underline{\Gamma}}_{A \overline{\circ} B, X}\, i\,.$$

5.6.1. Следствие. *Если* $X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$, *то*

$$\overline{\underline{\Gamma}}_{A^{\overline{\underline{\circ}} r}, X} = \overline{\underline{\Gamma}}^{\,r}_{A,X} \qquad (r = 1, 2, \ldots)\,.$$

5.7. Формула (26) дает нам удобный способ нахождения экстремальных собственных чисел матриц. Займемся фактическим определением экстремальных собственных векторов. Так как $\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$ вместе с каждым вектором содержит весь содержащий его луч, наша задача сводится к вычислению отношений между компонентами собственных векторов. Ввиду п. 5.1.1 мы можем, не нарушая общности, ограничиться такими матрицами A, для которых $\overline{\underline{\lambda}}(A) = 1$.

5.7.1. Будем говорить, что матрица A *стабилизируется*, если существует такое натуральное r, называемое *порядком* A, что $A^{\overline{\underline{\circ}} r} = A^{\overline{\underline{\circ}} (r+1)}$.

5.7.2. Для любой матрицы A

$$\overline{\mu} = \bigvee_{k, i_1, \ldots, i_k} \sqrt[k]{A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_k i_1}} < \overline{\lambda}(A)\,,$$

$$\underline{\mu} = \bigwedge_{k, i_1, \ldots, i_k} \sqrt[k]{A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_k i_1}} > \underline{\lambda}(A)\,,$$

где экстремумы берутся по всем последовательностям номеров, не содержащим контурных индексов и по всем $k = 1, \ldots, n$.

Это утверждение следует непосредственно из п. 5.5.3.

5.7.3. Лемма. *Пусть $\overline{\alpha}$ — максимальный среди элементов матрицы, не входящих в ее контурные строки или столбцы, а*

$$i_1, \ldots, i_t \tag{37}$$

— последовательность неконтурных номеров строк. Тогда при некотором натуральном $r \in [0, n]$

$$\prod_{l=1}^{t-1} A_{i_l i_{l+1}} \leqq \overline{\mu}^{t-r}\, \overline{\alpha}^r\,. \tag{38}$$

Доказательство. При $t \leqq n$ лемма, очевидно, верна, так как мы можем в этом случае взять $r = t$.

Если же $t \geqq n+1$, то в последовательности (37) должны быть циклы. Пусть $i_k, \ldots, i_{k+p} = i_k$ — один из них. Очевидно, мы можем считать, что $p \leqq n$. Если бы при всяком $r = 0, 1, \ldots, n$ неравенство (38) нарушалось:

$$\prod_{l=1}^{t-1} A_{i_l i_{l+1}} > \overline{\mu}^{t-r}\, \overline{\alpha}^r\,, \tag{39}$$

то мы бы имели

$$\overline{\mu}^{t-r}\, \overline{\alpha}^r < \prod_{l=1}^{k-1} A_{i_l i_{l+1}} \prod_{l=k}^{k+p-1} A_{i_l i_{l+1}} \prod_{l=k+p}^{t-1} A_{i_l i_{l+1}} \leqq \prod_{l=1}^{k-1} A_{i_l i_{l+1}} \prod_{l=k+p}^{t-1} A_{i_l i_{l+1}}\, \overline{\mu}^p\,.$$

Осуществляя такой процесс последовательной замены циклических произведений на степени числа $\overline{\mu}$ с последующими сокращениями, мы придем к неравенству вида (39) для случая $t \leqq n+1$, а это противоречит уже установленному.

5.7.4. Теорема. *Если матрица A экстремально петлевая и $\overline{\lambda}(A) = 1$, то эта матрица стабилизируется.*

Доказательство. Рассмотрим элемент

$$(A^{\bar{\circ} t})_{ij} = \bigvee_{i_1, \ldots, i_{t-1}} A_{i i_1} A_{i_1 i_2} \ldots A_{i_{t-1} j}\,. \tag{40}$$

Если стоящее под знаком максимума произведение не содержит сомножителей с контурными (а в наших условиях — с петлевыми) индексами, то по предыдущему найдется такое натуральное $r \in [0, n]$, что

$$(A^{\bar{\circ} t})_{ij} \leqq \overline{\mu}^{t-1-r}\, \overline{\alpha}^r\,. \tag{41}$$

Пусть i_0 — петлевой номер, т. е. $A_{i_0 i_0} = \bar{\lambda}(A)$. Выберем t таким, чтобы было

$$\bar{\lambda}^{t-2} A_{i i_0} A_{i_0 j} > \bar{\mu}^{t-1-r} \bar{\alpha}^r . \tag{42}$$

Очевидно, для этого достаточно положить (учитывая, что $\bar{\lambda} = 1$)

$$t > 2 + \frac{r \log \bar{a} - \log A_{i i_0} - \log A_{i_0 j}}{- \log \bar{\mu}} . \tag{43}$$

Поскольку $\log \bar{\mu} \neq 0$, требуемое t всегда можно найти. Но, очевидно,

$$(A^{\bar{\circ} t})_{ij} \geqq A_{i i_0} \bar{\lambda}^{t-r} A_{i_0 j} ,$$

а это вместе с (42) противоречит неравенству (41).

Следовательно, при значениях t, удовлетворяющих неравенству (43) последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_{t-2}$ из (40) должна содержать петлевые номера. Увеличивая, если это необходимо, t еще больше, мы можем добиться того, чтобы хотя бы один из петлевых номеров повторялся.

Пусть $i_r = i_{r+k}$ — некоторый повторяющийся петлевой номер.

Произведение

$$A_{i_r i_{r+1}} \ldots A_{i_{r+k-1} i_{r+k}} \tag{44}$$

должно быть в условиях (40) максимальным. Так как матрица A по условию петлевая, произведение (44) может быть максимальным лишь в том случае, когда $i_r = i_{r+1} = \cdots = i_{r+k}$. В этом случае оно будет равно $\bar{\lambda}^k$.

Рассмотрим теперь

$$(A^{\bar{\circ} (t+1)})_{ij} = A_{i i'_1} A_{i'_1 i'_2} \ldots A_{i'_t j} .$$

В силу тех же соображений мы можем найти такие r' и $k' > 0$, что

$$A_{i'_{r'} i'_{r'+1}} = \cdots = A_{i'_{r'+k'-1} i'_{r'+k'}} = \bar{\lambda}(A) .$$

Очевидно,

$$\bar{\lambda} \cdot (A^{\bar{\circ} t})_{ij} = \prod_{l=0}^{r-1} A_{i_l i_{l+1}} \bar{\lambda}^{k+1} \prod_{l=r+k}^{t-1} A_{i_l i_{l+1}} \leqq (A^{\bar{\circ} (t+1)})_{ij} ,$$

и вместе с тем

$$(A^{\bar{\circ} t+1})_{ij} = \prod_{l=0}^{r'-1} A_{i'_l i'_{l+1}} \bar{\lambda}^{k'} \prod_{l=r'+k'}^{t} A_{i'_l i'_{l+1}} \leqq \bar{\lambda}(A^{\bar{\circ} t})_{ij} .$$

Таким образом,

$$\bar{\lambda} \cdot (A^{\bar{\circ} t})_{ij} = (A^{\bar{\circ} (t+1)})_{ij} .$$

Но по условию $\bar{\lambda} = 1$. Следовательно, начиная с некоторого $t = t_{ij}$,

$$(A^{\bar{\circ} t})_{ij} = (A^{\bar{\circ} (t+1)})_{ij} .$$

Полагая

$$t^* = \bigvee_{i,j} t_{ij} ,$$

мы получим

$$A^{\overline{\circ}\, t^*} = A^{\overline{\circ}\,(t^*+1)}\,,$$

а это и требовалось.

5.7.5. Замечание. Доказанная теорема содержит некоторую весьма грубую оценку порядка стабилизирующейся матрицы. Вместе с тем для ряда задач важен не столько порядок матрицы сколько ее стабильная экстремальная степень. А эта степень фактически вычисляется последовательным нахождением экстремальных квадратов

$$A^{\overline{\underline{\circ}}\, 2}, A^{\overline{\underline{\circ}}\, 4}, \ldots, A^{\overline{\underline{\circ}}\, 2^k}, \ldots$$

6. Нахождение всех экстремальных собственных векторов данной матрицы

6.1. Все проводимые далее рассуждения справедливы в равной мере для максимальных собственных векторов и минимальных собственных векторов. Поэтому мы будем говорить об экстремальных собственных векторах, проводя для определенности все выкладки для случая максимальных векторов.

Экстремальное собственное число рассматриваемой далее матрицы A будем считать равным единице: $\overline{\underline{\lambda}}(A) = 1$.

6.2. Описание всех экстремальных собственных векторов матрицы в том частном случае, когда эта матрица петлевая, содержится в следующей теореме.

Теорема. *Если матрица A — петлевая, и k — ее экстремальный порядок, то множество всех ее экстремальных собственных векторов $\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$ является экстремальным выпуклым конусом, натянутым на столбцы матрицы* $A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}$ т. е.

$$\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A) = \left\{ \mathop{\Diamond}_{j} \lambda_j \big(A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}\big)_{.j} \right\} \qquad (\lambda_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n)\,.$$

Доказательство. Поскольку

$$A \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} A^{\overline{\underline{\circ}}\, k} = A^{\overline{\underline{\circ}}\,(k+1)} = A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}\,,$$

каждый из столбцов $A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}$ оказывается собственным вектором матрицы A. Будучи экстремально выпуклым конусом (см. п. 5.5.2), множество $\overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$ должно поэтому содержать весь экстремально выпуклый конус, натянутый на столбцы $A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}$.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}(A)$. По п. 5.6.1 $X \in \overline{\underline{\mathfrak{X}}}\big(A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}\big)$. В частности, отсюда следует, что

$$A^{\overline{\underline{\circ}}\, k} \mathbin{\overline{\underline{\circ}}} X = X\,,$$

т. е. по п. 4.7.2.2 X должен принадлежать экстремально выпуклому конусу, натянутому на столбцы $A^{\overline{\underline{\circ}}\, k}$.

6.3. Сведем теперь процесс нахождения всех экстремальных собственных векторов произвольной матрицы A к нахождению всех экстремальных собственных векторов некоторой петлевой матрицы.

6.3.1. Пусть матрица A задана. Пользуясь п. 5.5.3, мы можем построить ее контурный граф $\overline{\Gamma}_A^*$ (процесс построения $\overline{\Gamma}_A^*$ можно несколько усовершенствовать, фиксируя в процессе вычисления матриц вида $A^{\bar{\circ} r}$ „происхождение" максимальных диагональных элементов). Если каждый контур $\overline{\Gamma}_A^*$ является петлей, то матрица A петлевая, и наша задача решается на основании теоремы п. 6.2. Предположим поэтому, что граф $\overline{\Gamma}_A^*$ содержит некоторый контур $(i_1, \ldots, i_s)$ $(s > 1)$. В дальнейших рассуждениях этот контур будем предполагать фиксированным.

6.3.2. По предположенному мы имеем

$$i_{t+1} \in \overline{\Gamma}_A^* i_t \,, \tag{45}$$

причем здесь и далее под i_{s+1} будет пониматься i_1.

Возьмем произвольно $X \in \overline{\mathfrak{X}}(A)$. По определению графа $\overline{\Gamma}_A^*$ соотношения (45) означают, что

$$A_{i_t i_{t+1}} X_{i_{t+1}} = X_{i_t} \,. \tag{46}$$

Последние же равенства позволяют выразить все компоненты $X_{i_1}, \ldots, X_{i_s}$ вектора X через одну из них, скажем, через X_{i_1}.

$$X_{i_t} = \gamma_t X_{i_1} \qquad (t = 1, \ldots, s) \,, \tag{47}$$

где при $1 < t \leqq s$

$$\gamma_t = \prod_{v=1}^{t-1} \frac{1}{A_{i_v i_{v+1}}} \,,$$

а $\gamma_1 = 1$.

6.3.2.1. Подчеркнем, что коэффициенты γ не зависят от конкретного выбора собственного вектора X.

6.3.3. Будем теперь последовательно осуществлять запланированную редукцию матрицы A к некоторой петлевой матрице.

Перепишем для этого равенство $A \bar{\circ} X = X$ в виде системы

$$\bigvee_{j=1}^{n} A_{ij} X_j = X_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \,,$$

или, отделяя компоненты X и уравнения с номерами вида i_t от всех остальных,

$$\bigvee_{j \neq i_t} A_{ij} X_j \vee \bigvee_{t=1}^{s} A_{i i_t} X_{i_t} = X_i \qquad (i \neq i_u)$$

$$\bigvee_{j \neq i_t} A_{i_u j} X_j \vee \bigvee_{t=1}^{s} A_{i_u i_t} X_{i_t} = X_{i_u} \qquad (u = 1, \ldots, s) \,.$$

Подставим в полученную систему вместо каждого X_{i_t} правую часть соответствующего равенства (47).

Наша система после очевидных упрощений перепишется так:

$$\left.\begin{aligned} &\bigvee_{j \neq i_t} A_{ij} X_j \vee \left(\bigvee_{t=1}^{s} A_{i i_t} \gamma_t\right) X_{i_1} = X_i \qquad (i \neq i_u)\,, \\ &\bigvee_{j \neq i_t} A_{i_u j} X_j \vee \left(\bigvee_{t=1}^{s} A_{i_u i_t} \frac{\gamma_t}{\gamma_u}\right) X_{i_1} = X_{i_1} \qquad (u = 1, \ldots, s)\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Но в левой части каждого из равенств последней группы коэффициент при X_{i_1} не может быть меньше, чем $(u+1)$-ый экстремизируемый член, который, однако, равен

$$A_{i_u i_{u+1}} \frac{\gamma_{u+1}}{\gamma_u} = 1\,.$$

С другой стороны, он не может быть больше коэффициента при X_{i_1} в правой части уравнения, каковой равен также единице.

Следовательно, во-первых, при любом $u = 1, \ldots, s$

$$\bigvee_{t=1}^{s} A_{i_u i_t} \frac{\gamma_t}{\gamma_u} = 1\,,$$

и, во-вторых, в левых частях равенств этой группы максимум достигается на последнем члене.

Ввиду сказанного, мы можем последние равенства переписать как

$$\bigvee_{j \neq i_t} A_{i_u j} X_j \frac{1}{\gamma_u} \vee X_{i_1} = X_{i_1} \qquad (u = 1, \ldots, s)\,. \tag{49}$$

Эта система равенств равносильна единственному равенству

$$\bigvee_{j \neq i_t} \left(\bigvee_{u=1}^{s} A_{i_u j} \frac{1}{\gamma_u}\right) X_j \vee X_{i_1} = X_{i_1}\,. \tag{50}$$

Действительно, (50) из (49) вытекает тривиальным образом. Наоборот, если (50) выполняется, то это означает, всего-навсего, что

$$\bigvee_{j \neq i_t} \left(\bigvee_{u=1}^{s} A_{i_u j} \frac{1}{\gamma_u}\right) X_j \leqq X_{i_1}\,,$$

т. е., что

$$A_{i_u j} \frac{1}{\gamma_u} X_j \leqq X_{i_1} \qquad \text{при всех} \quad j \neq i_t\,, \quad u = 1, \ldots, s\,.$$

Но это в свою очередь означает, что

$$\bigvee_{j \neq i_t} A_{i_u j} \frac{1}{\gamma_u} X_j \leqq X_{i_1} \qquad \text{при всех} \quad u = 1, \ldots, s\,,$$

а это и дает нам систему (49).

Таким образом система (48) приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} &\bigvee_{j \neq i_t} A_{ij}\, X_j \vee \left(\bigvee_{t=1}^{s} A_{i\, i_t}\, \gamma_t\right) X_{i_1} = X_i \qquad i \neq i_u\,, \\ &\bigvee_{j \neq i_t} \left(\bigvee_{u=1}^{s} A_{i_u j}\, \frac{1}{\gamma_u}\right) X_j \vee X_{i_1} = X_{i_1}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

6.3.4. Обозначим через A^* матрицу коэффициентов системы (51), а через X^* — вектор, получаемый из n-вектора X отбрасыванием его компонент $X_{i_2}, \ldots, X_{i_s}$.

Очевидно, в этих обозначениях систему (51) можно переписать как $A^* \bar{\circ}\, X^* = X^*$, откуда следует, что $\bar{\lambda}(A^*) = 1$, $X^* \in \bar{\mathfrak{X}}(A^*)$.

6.3.4.1. Из замечания п. 6.3.2.1 немедленно следует, что если $X \in \bar{\mathfrak{X}}(A)$, то $X^* \in \bar{\mathfrak{X}}(A^*)$.

Ясно, однако, что обратное, вообще говоря, неверно: для того, чтобы из $X^* \in \bar{\mathfrak{X}}(A^*)$ следовало $X \in \bar{\mathfrak{X}}(A)$, очевидно, нужно добавлять к X^* недостающие компоненты не как попало, а сообразуясь с равенствами (47).

Но в условиях (47), как это уже было выяснено в п. 6.3.3, системы (51) и (48), т. е. уравнения

$$A^* \bar{\circ}\, X^* = X^*$$

и

$$A \,\bar{\circ}\, X = X$$

становятся равносильными. Таким образом, если добавляемые к X^* компоненты удовлетворяют соотношением (47), то $X \in \bar{\mathfrak{X}}(A)$.

6.4. Если длина s рассмотренного выше цикла превосходит единицу, то переход от матрицы A к матрице A^* означает сведение задачи нахождения собственных экстремальных векторов матрицы A к решению той же задачи относительно строго меньшей матрицы A^*. Этот редукционный процесс можно продолжать до тех пор, пока мы не придем к некоторой матрице, не имеющей вовсе циклов более, чем единичной длины, т. е., к петлевой матрице.

Задача же определения всех экстремальных собственных векторов петлевых матриц решена в п. 6.2.

Литература

[1] Эйлер Л., Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи. ГТТИ, Москва-Ленинград 1934.

[2] Birkhoff, G., Lattice theory. New York 1949. Русский перевод: Теория структур. Москва 1952.

[3] Канторович Л. В., Вулих В. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. ГТТИ, Москва-Ленинград 1950.

[4] Лунц А. Г., Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем. Изв. АН СССР, сер. мат. **16** (1952) 405—426.
[5] Поваров Н. Г., Матричные методы анализа релейно-контактных схем по условиям несрабатывания. Автоматика и телемеханика **15** (1954) стр. 332.
[6] Shimbel, A., Structure in communication nets. Proc. Sympos. Inform. Nets, Polytechn. Inst. Brooklyn. New York 1954.
[7] Bellman, R., Karush, W., On a new functional transform in analysis: the maximum transform. Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961) 501—503.
[8] Moisil, Gr. C., Asupra unor representari ale grafurilor ce intervin in probleme de economia transportirilor. Communicarile Akademie RPR **10** (1960) 8, 647—652.
[9] Pandit, S. N., A new matrix calculus. J. Soc. Industr. Appl. Math. **9** (1961) 4, 632—639.
[10] Романовский И. В., Асимтотическое поведение процессов динамического программирования с непрерывным множеством состояний. Докл. АН СССР **159** (1946) 6, 1224—1227.
[11] Воробьев Н. Н., Экстремальная алгебра матриц. Докл. АН СССР **152** (1963) 1, 24—27.
[12] Berge, Cl., Théorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris 1958. Русский перевод: Теория графов и ее применения. ИЛ, Москва 1962.

Резюме

Ряд задач технико-экономического содержания приводит к рассмотрению систем экстремальных уравнений вида

$$\max_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\min_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

В статье рассматриваются условия разрешимости таких систем и приводится алгорифм решения.

Множество n-векторов с неотрицательными компонентами, рассматриваемое совместно с операциями максимизации

$$(X \vee Y)_i = \max \{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

минимизации

$$(X \wedge Y)_i = \min \{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и по-компонентного умножения на неотрицательный скаляр, называется экстремальным векторным пространством. Для таких пространств определяются понятия, аналогичные понятиям выпуклого множества и конуса в линейном пространстве.

Аналогом скалярного произведения n-векторов X и Y являются в экстремальном пространстве их максимальное и минимальное произведения

$$X \mathbin{\bar{\circ}} Y = \max_i X_i Y_i,$$

$$X \mathbin{\underline{\circ}} Y = \min_i X_i Y_i.$$

Эти операции позволяют определить максимальное и минимальное произведения матриц A и B соответственно как

$$(A \mathbin{\bar{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \mathbin{\bar{\circ}} B_{\cdot j},$$

$$(A \mathbin{\underline{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \mathbin{\underline{\circ}} B_{\cdot j}.$$

В статье рассматриваются свойства этих операций.

Равенства

$$A \mathbin{\bar{\circ}} X = \lambda X ,$$

$$A \mathbin{\underline{\circ}} X = \lambda X$$

определяют экстремальные собственные векторы и собственные числа матрицы A. Доказывается, что всякая матрица с положительными элементами имеет ровно одно максимальное и одно минимальное собственное число.

Приводится алгорифм вычисления экстремальных собственных чисел произвольной матрицы и описание множества всех ее экстремальных собственных векторов.

Kurzfassung

Eine Reihe von technisch-ökonomischen Aufgaben führt auf ein System von Extremalgleichungen der Form

$$\max_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m) ,$$

$$\min_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m) .$$

Es werden Bedingungen für die Lösbarkeit derartiger Systeme sowie ein Lösungsalgorithmus angegeben. Eine Menge von n-dimensionalen Vektoren mit nicht-negativen Komponenten zusammen mit den Operationen Maximierung

$$(X \vee Y)_i = \max \{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n) ,$$

Minimierung

$$(X \wedge Y)_i = \min \{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sowie der komponentenweisen Multiplikation mit nicht-negativen Skalaren heißt Extremal-Vektorraum. Für diese Räume werden analog zu den Begriffen der konvexen Mengen und Kegel in linearen Räumen entsprechende Begriffe eingeführt.

Analog zum Skalarprodukt von n-dimensionalen Vektoren X und Y tritt in Extremalräumen das Maximal- und das Minimalprodukt

$$X \mathbin{\bar{\circ}} Y = \max_i X_i Y_i ,$$

$$X \mathbin{\underline{\circ}} Y = \min_i X_i Y_i$$

von Vektoren auf. Mit diesen Operationen kann man das Maximal- und das Minimalprodukt zweier Matrizen A und B entsprechend als

$$(A \mathbin{\bar{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \mathbin{\bar{\circ}} B_{\cdot j} ,$$

$$(A \mathbin{\underline{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \mathbin{\underline{\circ}} B_{\cdot j}$$

definieren. Es werden die Eigenschaften dieser Operationen untersucht.

Durch die Gleichungen

$$A \mathbin{\bar{\circ}} X = \lambda X ,$$

$$A \mathbin{\underline{\circ}} X = \lambda X$$

werden die extremalen Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix A definiert. Weiter wird bewiesen, daß jede Matrix mit positiven Elementen genau einen maximalen und einen minimalen Eigenwert besitzt.

Ein Algorithmus zur Berechnung der extremalen Eigenwerte einer beliebigen Matrix wird angegeben und die Menge aller ihrer Eigenvektoren beschrieben.

Abstract

Some problems in engineering economics lead to systems of extremal equations of the form

$$\max_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\min_j A_{ij} X_j = B_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Conditions of solvability and a solving algorithm are given. An "extremal vector space" is defined as a set of n-dimensional vectors with non-negative components together with the operations

$$(X \vee Y)_i = \max \{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(X \wedge Y)_i = \min \{X_i, Y_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

called maximisation and minimisation, resp., and the operation of multiplying the components by non-negative scalars. Concepts corresponding to convex set and cone as used in the theory of linear spaces are introduced.

The maximal and minimal products of two vectors X and Y are defined by

$$X \mathbin{\bar{\circ}} Y = \max_i X_i Y_i,$$

$$X \mathbin{\underline{\circ}} Y = \min_i X_i Y_i,$$

resp.; they correspond to the scalar product in ordinary vector spaces. With the help of these operations one can further define the maximal and minimal products of two matrices A and B as follows:

$$(A \mathbin{\bar{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \mathbin{\bar{\circ}} B_{\cdot j},$$

$$(A \mathbin{\underline{\circ}} B)_{ij} = A_{i\cdot} \mathbin{\underline{\circ}} B_{\cdot j}.$$

The properties of these operations are investigated.

The equations

$$A \mathbin{\bar{\circ}} X = \lambda X,$$

$$A \mathbin{\underline{\circ}} X = \lambda X$$

define the extremal eigenvectors and eigenvalues of the matrix A. It is shown that any matrix with positive elements has exactly one maximal and one minimal eigenvalue.

For computing the extremal eigenvalues of an arbitrary matrix an algorithm is given and the set of all eigenvectors is discribed.

(Поступило 9 IX 1965)

Адрес автора:

Проф. докт. Н. Н. Воробьев

Центральный экономико-математический институт
АН СССР (Ленинградское отделение)

Ленинград

Ул. Чайковского 1